



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

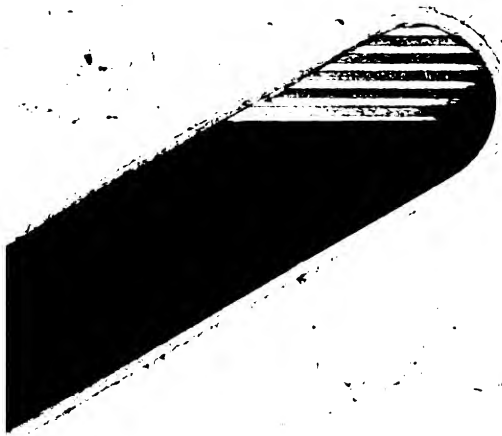
- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

C

450,039



C 450,039

C

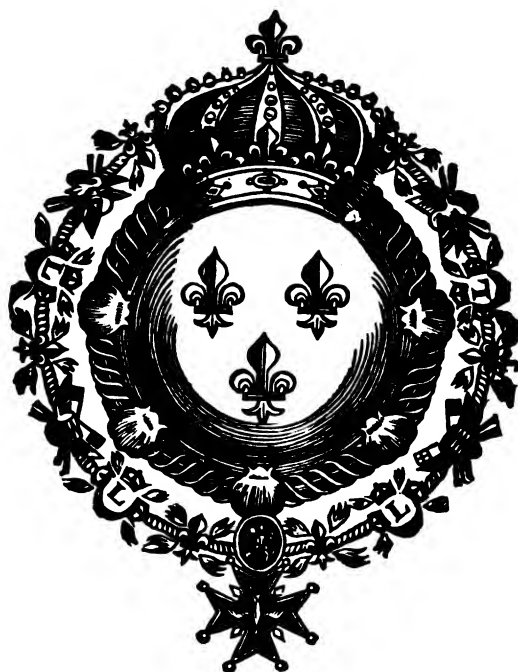
450,000





IMPRESSION ANASTALTIQUE
CULTURE ET CIVILISATION
115, AVENUE GABRIEL LEBON
BRUXELLES
1966

CHRISTIANI
H V G E N I I
ZVLICHEMII, CONST. F.
HOROLOGIVM
OSCILLATORIVM
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM
AD HOROLOGIA APTATO
DEMONSTRATIONES
GEOMETRICÆ.



PARISIIS,
Apud F. MUGUET, Regis & Illustrissimi Archiepiscopi Typographum,
viâ Citharæ, ad insigne trium Regum.

MDCLXXIII.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

TS
545
.H97
1966a

Dividitur liber hic in partes quinque,
quarum

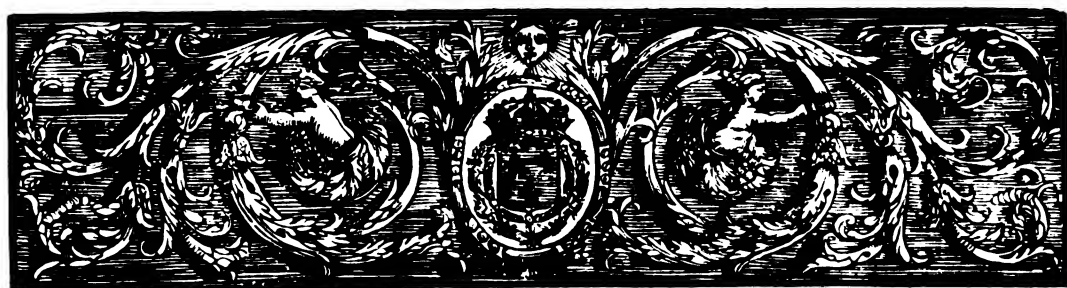
Prima *Descriptionem* HOROLOGII OSCILLATORII continet.

Secunda agit de *Descensu* gravium , & motu eorum in Cycloide.

Tertia de *Evolutione & Dimensione* linearum curvarum.

Quarta de Centro Oscillationis seu Agitationis.

Quinta alterius Horologii constructionem , in quo circularis
est penduli motus, exhibet, & Theoremata
de *Vi Centrifuga*.



LVDOVICO XIV,
FRANCIÆ. ET NAVARRÆ
REGI INCLYTO.

RENATAM, Rex maxime, restitutamque hoc sæculo Geometriam, Galliæ præcipue debemus. Hinc enim orti, qui magna meliorique sui parte deperditam, ac veluti sepultam, instaurarunt primi, & in lucem reduxerunt. Quorum vestigiis insistentes, ita eam deinde, per totam Europam, excoluere viri subtilissimi, ut pauca jam posterorum industriæ ab his relicta videantur; veterum vero inventa longissime prætervecti sint. In hac scientia, quam semper admiratus sum & amavi plurimum, quandocunque ad eam animum applicui, illa mihi præ cæteris proposui investiganda, quæ vel ad vitæ commoda, vel ad Naturæ cognitionem, reperta prodesse possent. Tunc verò optimè operam me collocasse existimaui, cum in ea incidissem, in quibus utilitas cum inveniendi difficultate, ac subtilitate ali-

qua, conjuncta foret. Quod si commendationis nonnihil accersere muneri nostro permittitur, ne prorsus indignum tua magnitudine appareat; non alias felicius, quam in hoc Horologii invento, utrumque illud me consecutum esse profiteor. Etenim, cum ex parte mechanicum sit inventum; ex parte altera, eaque multò præcipua, geometricis principiis constet; id quod ad posteriorem hanc attinet, non levi conamine, ex intimis artis recessibus petendum fuit: adeo quidem, ut inter omnia, quæ impensiore studio hætenus pertractaverim, haud dubie primum huic speculationi locum tribuam. Quænam vero in his sit utilitas, non est quod multis, Rex potentissime, ostendere tibi laborem. Non solum enim diutinâ experientiâ compertum habes, ex quo regiæ tuæ penetralibus recipi meruere Automata nostra, quantum, æquabili horarum demonstratione, cæteris hujusmodi machinationibus excellant: sed & potiores usus eorum, quibusque jam inde à principio mihi destinata fuere, non ignoras. Illos scilicet, quos & in Cælestium observationibus, & in Longitudinibus locorum inter navigandum dimetiendis, præstare apta sunt. Tuo enim jussu, non semel, per mare vecta fuere Horologia nostra. Tuis auspiciis eadem nec pauca, Astronomiæ usibus dicata, visuntur in præclara illa Vraniæ arce, quam insigni nuper magnificentia, quantaque antehac regum nemo, exædicandam curasti. Quæ quoties mecum reputo, toties de fortuna hu-

jus inventi, quod in tua tempora inciderit, non parum mihi gratulari soleo. Nec jam requireret quisquam, opinor, qui quantum tibi illud debeat intelliget, cur lucubrationes has, quibus rationem ejus omnem descriptionemque explicui, augusto Nomini tuo inscribendas duxerim. Ac minus etiam id mirabitur, qui mihi, ad hæc atque alia meditanda, tranquillum otium benignitate tua contigisse didicerit. Namque & hujus, ut mihi aliquatenus apud te ratio constaret, adnitendum erat; & quoquo modo conandum, ut, multis continuisque à te beneficiis affectus, nonnulla grati animi significatione defungerer. Scio equidem, rebus maximis, negotiisque iis intento, quæ in illo rerum fastigio positum agitare convenit, haudquaquam tibi liberum esse, ut ad hujusmodi contemplationes animum, alioqui rerum omnium capacem, advertas. Sed non ideo minus grata hæc fore, minusve tibi probatum iri arbitror, Rex augustissime; cui illa maximè placere videmus, quæ plurimum publicè profunt; neque aliud magis curæ esse, quam ut nova incrementa fumant optimæ disciplinæ, novisque illustrentur inventis. Hoc enim fatis declarat eximia illa tua, ac singularis, tum in ipsis promovendis, tum in his qui cognitione earum præminent remunerandis, liberalitas. Quam non immensæ, ac solito majores, bellorum impensæ quidquam imminuunt: non Galliæ tuæ fines circumscribunt. Vt plane te hoc agere appareat, quò non solum sub

imperio tuo viventes, sed & Orbis universus,
quacunq̃ beneficio tuo dignus est, te regnan-
te, eruditior, ornatior, felicior evadat. Cui
verissimæ præclarissimæque gloriæ tuæ, ita ali-
quid fortasse etiam hæc literaria monumenta
conducent; ut, si viguisse hoc tempore studia
ista, artesque, posteris testari possint, simul
illos edoceant, tuæ hoc virtuti, atque ani-
mi magnitudini, ante omnia acceptum feren-
dum esse. Lutetiæ Parisiorum; xxv. Mart. A.
CICICLXXIII.





HADRIANI VALLII DAPHNIS, ECLOGA.

*Ad Christianum Hugenum Zulichemium,
Constantini F.*

INITIMUM tutela, simul jucunda voluptas,
Dilectæ Phœbo, Sceverinides * Oceaninæ;
Hunc quoque Pierium mihi fortunate laborem:
Pervigilem noctem quo carmine duxerit Ancon
Navita, dicemus: vestro sic gurgite numquam
Pan lavet, aut turpes incestent æquora Fauni.

Te, quem Fama vehit super aurea sidera curru,
Ne pigeat nobis aurem præbere faventem,
HUGENIDE, decus Hugenidum, fratrumque patrisque:
Haud indigna tuo ferimus donaria sensu,
Sicelisin aptata modis à vate Batavo
Mixta Palæphatio commenta Solensia versu,
Teque intertextum tuaque præclara reperta.

Iam caput Oceano, stipata minoribus astris,
Extulerat radiis fraternis æmula Phœbe,
Cum reditum molirentur pastoria pubes,
Sidere quam pleno conchas legisse marinas
Iuverat, hærentesque vadis captare paguros.
In celso tamen advertunt Ancona morantem
Colle, reum toties promissi carminis. ipsum
Thestylis & Corydon, quos cætera turba secuti,
A tergo circumveniunt, cinguntque corona.
Ecquid agat, rogitant blandè: tum fausta precantur;
Et damnant voti, promissaque carmina poscunt.
Contra ille; O Pueri, quid portet craftinus Eos,
Sedi explorator: turmales agmine mergi,
Solivaga aut cornix, aut alcyones desertæ

* Sceverina, Pagus apud Batavos, mari adjacens.

DAPHNIS ECLOGA.

Si qua darent mihi signa. maris cras æquor arandum.
 Detinuit nunc usque Iovis clementia Iudi,
 Et picturatus tot circum animalibus æther.
 Quæ nos in vitreo miramur monstra profundo,
 Fert radians æther, vultus formasque natantum.
 Cancer ibi est, delphinque; est grandi corpore cetus.
 Ad Boream pisces, & contemplare sub Austro
 Pisces; nuper ubi numero crevisse feruntur.
 Sunt urna, fluviisque, & aplustris comita carina
 Illic. quin operis simulamina plurima vestri,
 Luminaque in cælo pecori debentia nomen.
 Sunt hædi parvæque fues, materque capella.
 Et fuscæ sparso quæ candet semita lacte.
 Vestibulum servant, elucens vellere fulvo
 Dux aries, ingensque auratus cornua taurus.
 Bini cernunturque canes, pernoxque bubulcus;
 Plaustraque; quique auriga suis excussus habenis.
 Stellatum volat alatus per inane caballus:
 Ac præsepe suum juxta stabulantur aselli.
 Illic virgo, manum Cereali inlustris arista,
 Et, transmutatus faciem, Pan ipse renidet;
 Daphnin amans vestrum, secretæ rupis in umbra,
 Vranie velut edocuit: me singula Daphnis.
 Singula quæ (carmen quia poscitis) ordine pandam.
 Extemplo tentat vocem: numerosque modosque
 Perpendens mulcet variis concentibus auras.
 Tum venti posuere. jacet sine fluctibus æquor;
 Factaque sunt terris, sunt facta silentia ponto.
 Mox interfatur: Quod prosperet; ab Iove magno
 Ordinar: ordiri consueverunt ab Iove vates.
 Vos, nec enim rerum brevis hic mihi nascitur ordo,
 Nocturnum chorea defendite corpore frigus.
 Inde Iovis magni cunas, veterisque celebrat
 Saturni iussum crudele, dolumque Cybelles;
 Ortaque Dictæis Corybantia sacra latebris:
 Ut puero nutrix sit olentis lecta mariti
 Vxor; & ipsa recens hædos enixa gemellos;
 Queis comitata polum modo lucida stella frequenter,
 Quæ prius Oleniis balavit bestia campis;
 Sub pedibusque terat formosi limen Olympi.

Tantus

DAPHNIS ECLOGA.

Tantus amor Iovis , & percepti gratia lactis.

Nec tamen hoc niveum manasse fluore nitorem ,
In duo secta vias , oculis manifesta videntum ,
Semita quo candet ducens ad tecta Tonantis;
Tergeminam sed noctem productumque canebat
Alciden mundo ; deus immortalis haberi
Haud pote qui fuerat , sopitæ parvula mammis
Labra pater gnati nisi conjugis admovisset :
Quæ , simul experrecta , simul conterrita , surgens
Vvidulas tenero mammas subtraxerit ori ,
Indignata. pavimentum tabulataque cœli
Deciduus maculis ut tunc infecerit albis
Per convexa ruens in se revolubilis humor :
Orbita cycneo nunc unde bifurca colore ,
Ducta per æquales medio discrimine partes ,
Cæruleum velut argento ferruminet axem :
Axem , cervices qui quum lassaret Atlantis ,
Haud gravis Herculeo requierit sarcina collo ;
Atque tot ærumnas quem post , manesque subactos ,
Ipse suis ornet jam portio magna triumphis ;
Hesperidum contra custodem divitis horti
Insurgens Anguem pede nixus ; aperta que retro
Terribili rictu nil curans ora Leonis ;
Lernæque audacem Hydræ succurrere Cancrum ;
Monstra novercales testantia jugiter iras
Et frustra bacchatum odium Iunonis iniquæ.

Hinc aliam memorat grassatam fraude novercam ;
Et transmittendi pavidam nimis æquoris Hellen :
In thalamos sit ut illa tuos , Neptune , recepta :
Phryxeumque pecus , fœtamque heroibus Argo
Phasidos ad fluctus deducit & æthera cantu.

Nec filet Europæ vectoris præmia ; vel te ,
Bigarum Pelopis perjuri , Myrtilæ , rector.
Myrtoum pelagus signaras ante caduco
Funere ; sublimem nunc tollunt cornua Tauri.

Haud procul his Hyades notat exardescere : sed , quæ
Sunt Hyades Graiis , Sucas dixisse Latinos ;
Atque duas septem mutasse Trionibus Arctos ;
Arctophylaca pigro , sua plaustra sequente , Bubulco ;
Quando bovem prisco vocitabant more trionem ,

DAPHNIS ECLOGA.

Quod tereret duro proscissam vomere terram.
 Hanc adeo sortem miserans, suspiria ducit;
 Buceriumque genus questu compellat inani;
 Ah pecus infelix, armentum! sæcla fuerunt,
 Pondere quum duro neque vos gemeretur aratri,
 Navita nec vestro vocitaret nomine stellas.
 Tunc neque sidus erat terris pia Virgo relictis,
 Quæ Cereale manu spicum gerit; Icariotis
 Sive sit Erigone, cui fida Canicula patrem
 Quærenti indigna monstravit cæde peremtum;
 Atque, comes dominæ, domino comitem Oarioni
 Astra minor socium majorem repperit inter:
 Seu magis Astræi sit sanguine creta, perenne
 De genitore suo quæ nomen contulit astris:
 Sive sit antiquæ Themidis justissima proles,
 Aversata jugo vos aspectare gravari,
 Tempora dum, pulsus melioribus, ærea surgunt:
 Sive sit alma Ceres; horrens fugitiva videre
 Vos quoque mactari; nil peior linquit inausum
 Ferrea dum soboles, ipsorum inimica Deorum:
 Quos, quasi de terra (nam Dii coluistis & illam)
 Sit pepulisse parum, tentavit pellere cælo.
 Tum detestatur suffultos angue Gigantas;
 Porphyriana, statu terrentem cuncta minaci;
 Rhæcumque; immanemque Gygen, validumque Mimanta;
 Enceladumque; manusque rotantem Ægeona centum;
 Et, cui par nemo feritate, Typhœa dirum,
 Ausos invasisse Deos tellure fugatos,
 Ac totum magno cælum complexisse tumultu,
 Undique divulsas jaculantes torviter ornos
 De tumulis cumulorum montibus ex aggestis.
 Terrigenam ut pubem, Divûm penetralia sancta
 Rimantem, Superi mentito fallere vultu
 Quæsierint, addit; dispertitosque pavore:
 Donec apud latè stagnantis flumina Nili
 Horrificam faciem Pan sumserit Ægocerotis;
 Ambiguoque sono Superos animarit ad arma,
 Anguipedesque metu dare terga coëgerit omnes:
 Cælo donandos Asinos auxisse timorem
 Congerie vocum, perterricrepoque fragore:

DAPHNIS ECLOGA.

Illa cælicolis nam tempestate fuisse
 Auxilio Satyros, Silenorumque phalangem,
 Evantes in afellis cum Bacchæo ululatu,
 Thyrsis armatos, tectos colocynthide parma.

Parvus ut interea volucer cum matre Cupido
 Venerit Assyrii fugiens Euphratis ad undam;
 Induerintque gregis (Syriæ post numina genti)
 Squammigerum formas, gemini nunc aurea Pisces
 Lumina, signiferum Capricorno juncta per orbem,
 Ni fusa medius secernat Aquarius Vrna;
 Deucalioneos neque non edisserit imbres,
 Nectaris aut quanti Ganymedes pocula verset;
 Sive sit is Cecrops, peplo præsignis Athenæ;
 Pastor Aristæus seu plena alvearia gester,
 Quæ subter volitetis apes examine denso.

Qualiter & pandus vectarit Ariona Delphin,
 Ac aliter vectum Danaeum Persea narrat;
 Cepheaque, Andromedenque, & mœstam Cassiopeiam;
 Infertumque polo vastum Pistricis hiatum:
 Quem Phaëthonteus longo sinuamine propter
 Fulgeat Eridanus declivi proximus Austro:
 Nuper ad occulti Batavos ubi verticis axem
 Intuitos nova squammigerum simulacra micare:
 Sollertes Batavos, imo seu gurgite piscem
 Venari sit opus, vel in alto sidera cælo.

Tum canit, ut Daphnis sacra sub rupe docentem
 Viderit Vranien: argutas carmina silvas,
 Et repetita cavos ediscere carmina montes:
 Ut Chaldæa vetus, mira dulcedine capti,
 Stent auditores circum, & Babylonia turba;
 Dein quos Graia tulit, quos aut Nilotica tellus,
 Itala quos, ac pulchra suo cum Cæsare Roma;
 Post Arabum de stirpe viri & regnator Iberus;
 Ac tandem quos consultos Germania misit
 Astrorum cœlique, suæ qui sidera terræ;
 Inferior nullis ut item neque Gallia desit;
 Gallia magnanimi Regis splendore superba;
 Borbonios ignes cui parturit arduus æther:

Tum Dea quo Daphnin, Divam quo Daphnis amore
 Complexus, quanti non conscia Latmia saxa:

DAPHNIS ECLOGA.

Vtque Conon juveni radium donarit, utrimque
 Multo insignem auro, & pellucidulis crySTALLIS;
 Per quas quod spectes, prope fiat; & augmina sumat:
 Dixerit &: Sollers, en, primus quale Baravus
 Munus adornarit; sed Etrusci quo decus Arni
 Est Antenorea senior Tyrrhenus in urbe
 Regna Iovis princeps metatus, ab æthere vobis
 Nunquam nota prius miracula nuntia portans;
 Lunæ montes; vultus tibi, Phosphore, ternos;
 Quove satellitio sublustri nocte vagetur
 Stella Deum regis per cæcula templa superne.
 Hoc quoque tu non nota prius miracula prodes:
 Hujus erat tibi servatus sollertior usus;
 Arcanumque Chroni mortalibus omne recludes.
 Accipe frustra olim nobis optabile donum.

Daphnidis ad gratum nomen pernice chorea
 Exsultant alacres Pueri: neque segnius ipse
 Prosequitur; Geminas imitantia lumina falces
 Hactenus ut vanè Saturni credita fidus
 Oblongo tam diversa sub imagine disco
 Fingere, quando globum teretem teres annulus extra
 Splendet, & ambo nigror spatii determinat intus;
 Exiguo circum quos erret stellula gyro:
 Omnia divino quæ fretus munere Daphnis
 Extulerit, non ante novam vulgata per artem:
 Adjungitque; quod his meritis permulsus, eundem
 In sua magna Chronus sit adire sacraria passus:
 Hæc oculis lustrarit ut omnia; promserit atque
 Inventum subtile secandi temporis illinc;
 Partes quo minimas ac momina dividat horæ,
 Oscilla ex tenui suspendens mollia filo:
 Id labyrintheos cursus qui dirigat alni,
 Ignarumque viæ ratis haud sinat esse magistrum:
 Cui neque quotidie tam certus spondeat auctor,
 Oceano quantum Titan altissimus exstet;
 Ac quibus emergat, queis tunc simul occidat oris,
 Daphnidos egregio norint conamine docti.

Ille canit: chorus in numerum sua brachia quassant,
 Alternoque solum pede pulsan. at freta saltu
 Librabant hilares sese super humida thynni.

DAPHNIS ECLOGA.

Auritus leporum populus tunc creditur ultro
Iliceas liquisse domos, carasque quietes
Vicini nemoris: nulloque frequentior unquam
Caricis arrofor prodiisse cuniculus antris
Tempore narratur; narrent si vera puellæ
Littoreæ, quæ siccandis custodia passim
Retibus ad ventos expansis forte sedebant.
Pectore Neræides nudo, lasciva caterva,
Visa per incertam Lunam, visæve putantur,
Et Triton, Glaucusque, procul sub luce maligna;
Tuque, cubans juxta stratas prope littora phocas,
Neptuninarum pecudum fidissime custos:
Neu quisquam seræ meminit decedere nocti.
Interea tenebræ densantur; & abdita nimbo
Cynthia dum latitat, cœli de parte serena
Cinctum non solitis processit crinibus astrum,
Prolixumque trahens albore notabile syrma.
Mirantur chorus attoniti. miratur & ipse;
Præsertim tantum capiti cum demsit honorem,
Ornatumque sequacem omnem mox reddita Luna.
Infit &: Ad sua quisque mapalia tendite nota,
Prodigio nil solliciti, curamve foventes.
Insuetos alias tales cantabimus ignes,
Et trepidantem nequicquam formidine vulgum.
Hæc Ancon: mihi visa tibi quæ digna referri,
HUGENIDÆ, decus Hugenidum, cui sidera curæ,
Nec Phœbum ac Pimplæ fas est contemnere Divas,
Queis tua tota domus, fratres, genitorque dicati.
Sic neque te facies peregrini terreat astri,
Idemve anne alius vario fulgore cometes.

A. CIO IOC LXV.

PRIVILEGE DU ROY.

L OUIS par la grace de Dieu Roy de France & de Navarre : A nos amez & feaux Confeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maistres des Requestes ordinaires de nostre Hostel, Baillifs, Seneschaux, Prevosts, leurs Lieutenans, & tous autres Justiciers & Officiers qu'il apparten-dra, Salut. Nostre cher & bien amé FRANÇOIS MUGUET nostre Imprimeur ordinaire, Nous a tres-humblement fait remontrer qu'il luy auroit esté mis és mains un Livre intitulé, *Christiani Hugentii Zulichemii Const. F. Horologium Oscillatorium, seu de motu Pendulorum ad horologia aptato demonstrationes Geometricæ*, qu'il desireroit donner au public s'il nous plaisoit luy en accorder la permission, humblement requerant icelle. A CES CAUSES voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous luy avons permis & accordé, permettons & accordons par ces presentes d'imprimer ou faire imprimer ledit Livre en telle forme, caractère, volume, & autant de fois que bon luy semblera, durant le temps de six années entieres & consecutives, à commencer du jour qu'il sera achevé d'imprimer pour la premiere fois, faisant tres-expresses défenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, de l'imprimer ou faire imprimer, vendre ny débiter durant ledit temps en aucun lieu de nostre Royaume, sans le consentement de l'Exposant, ou de ceux qui auront droit de luy, sous quelque pretexte que ce soit, à peine de quinze cens livres d'amende applicable, un tiers à Nous, un tiers à l'Hôpital General de nostre ville de Paris, & l'autre tiers à l'Exposant, de confiscation des exemplaires contrefaits, & de tous dépens, dommages & interests, à la charge qu'il en sera mis deux exemplaires en nostre Biblioteque ordinaire, un en celle du cabinet de nostre Louvre, & un autre en celle de nostre amé & feal Garde des Sceaux le sieur Daligre. Si vous mandons que du contenu en ces presentes vous fassiez jouir & user l'Exposant, & ceux qui auront droit de luy pleinement & paisiblement, cessant & faisant cesser tous troubles & empêchemens au contraire, voulans qu'en inferant ces presentes ou extrait d'icelles en chacun des exemplaires, elles soient tenuës pour bien & deuëment signifiées; Commandons au premier nostre Huissier ou Sergent sur ce requis, faire pour l'execution des presentes tous exploits à ce necessaires. CAR tel est nostre plaisir. DONNE' à Versailles le dernier jour de Septembre l'an de grace mil six cens soixante-douze. Et de nostre Regne le trentième. Signé, LOUIS. Par le Roy, COLBERT.

Registré sur le Livre de la Communauté des Marchands Libraires & Imprimeurs de Paris, le 4. Novembre 1672. suivant l'Arrest du Parlement du 8. Avril 1653. & celuy du Conseil Privé du Roy du 27. Fevrier mil six cens soixante-cinq. Signé, D. THIERRY, Syndic.

Achevé d'imprimer pour la premiere fois le premier jour d'Avril 1673.

Les Exemplaires ont esté fournis.

CHRISTIANI



CHRISTIANI HVGENII
ZVLICHEMII, CONST. F.

HOROLOGIVM OSCILLATORIVM,

S I V E

DE MOTV PENDVLORVM
AD HOROLOGIA APTATO
Demonstrationes Geometricæ.



NNVS agitur sextus decimus ex quo fabricam horologiorum, tunc recens à nobis inventorum, edito libello publicam fecimus. Ab illo verò tempore cùm multa invenerimus ad perfectionem operis spectantia, visum est ea singula hoc libro exponere. Quæ quidem adeo ad perfectionem ejus inventi pertinent, ut potissima ejus pars censei possint, ac velut fundamentum totius mechanicæ hujus, quo prius destituta erat. Mensura enim temporis certa atque æqualis pendulo simplici naturâ non inerat, cum latiores excursus angustioribus tardiores observentur; sed geometria duce diversam ab ea, ignotamque antea penduli suspensionem reperimus, animadversâ lineæ cujusdâ curvaturâ, quæ ad optatam æqualitatem illi conciliandam mirabili planè ratione comparata est. Quam postquam

A

horologijs adhibuimus, tam constans certusque eorum motus evasit, ut post crebra experimenta terra marique capta, manifestum jam sit & Astronomiæ studijs & arti Nauticæ plurimum in ijs esse præsidij. Hæc ea est linea quam defixus in circumferentia currentis rotæ clavus, continua circumvolutione, in aëre designat; à Geometris nostri ævi cycloidis nomine donata, & ob alias multas sui proprietates diligenter expensa; à nobis vero propter eam quam diximus mensurandi temporis facultatem, quam nihil tale suspicantes, ac tantum artis vestigiis insistentes, inesse ipsi comperimus. Hanc cum jam pridem amicis horum intelligentibus notam fecerimus (nam non multo post primam horologii editionem animadversa fuit) nunc eandem, demonstratione quam potuimus accuratissima firmatam, omnibus legendam proponimus. Itaque in hac tradenda demonstratione potissima pars hujus libri versabitur. Vbi primum necesse fuit novis nonnullis demonstrationibus stabilire & promovere ulterius viri maximi Galilei de descensu gravium doctrinam, cujus fructus desideratissimus, atque apex veluti summus, hæc ipsa quam invenimus cycloidis est proprietas.

Quæ porro ut ad pendulorum usum aptari posset, nova curvarum linearum consideratio adhibenda fuit, earum scilicet quæ sui evolutione alias curvas generant. Vnde comparatio inter se longitudinis curvarum cum rectis nascitur, quam ulterius etiam quam præsens necessitas postulabat prosecutus sum, propter theoriæ, ut mihi visum est, elegantiam & novitatem.

Cæterum ad explicandam Penduli Compositi naturam, cujus utilitatem in constructione horum automatôn demonstro, adjungenda fuit Centrorum Oscillationis contemplatio, à pluribus quidem, sed minus feliciter, hætenus tentata; in qua theoremata complura animadversione, ni fallor, digna reperientur, ad figuras lineares, planas, solidasque pertinentia. Ante hæc omnia vero præmittitur ipsa horologii mechanica constructio, pendulique applicatio, eâ formâ quæ ad usus astronomicos aptissima reperta est, ad cujus instar reliquæ omnes, mutatis quæ opus est, facile ordinari possint.

Quia vero contigit egregio hujus inventi successu, quod fieri plerumque solet, quodque futurum prædixeram, ut plures sese ejus auctores esse cuperent, aut si non sibi ipsis, suæ tamen nationis alicui potius quam nobis eum honorem tribui vellent, iniquis eorum conatibus tandem aliquando occurrendum hic

arbitror. Nec sanè aliud fere opponere ijs necesse fuerit præterquam id unum, nempe ante annos sexdecim, cum nec dicto nec scripto cujusquam de horologijs hujusmodi mentio facta esset, aut rumor ullus omnino ferretur (loquor autem de penduli simplicis usu ad horologia translato, nam de Cycloidis additione nemo credo controversiam movebit) constructionem eorum propria meditatione me adinvenisse & perficiendam curasse. Insequenti anno, qui nempe hujus sæculi quinquagesimus octavus fuit, delineationem automati descriptionemque typis vulgasse; exemplaria, tum operis ipsius, tum libelli, quaquaversum dimisisse. Nam cum hæc ita omnibus nota sint, ut nec testimoniis eruditorum, nec Bataviæ Ordinum actis, quibus possent, confirmari opus habeant, facile apparet quid de illis existimandum sit, qui septem post annis eandem constructionem, quasi à se suisve amicis perfectam, libris suis venditarunt. Qui vero Galileo primas hic deferre conantur, si tentasse eum, non vero perfecisse inventum dicant, illius magis quam meæ laudi detrahere videntur, quippe qui rem eandem, meliore quam ille eventu, investigaverim. Cum autem vel ab ipso Galileo, vel à filio ejus, quod nuper voluit vir quidam eruditus, ad exitum perductum fuisse contendunt, horologiaque ejusmodi re ipsâ exhibita, nescio quomodo sibi creditum iri sperent, cum vix verisimile sit adeo utile inventum ignoratum manere potuisse annis totis octo, donec à me in lucem ederetur. Quod si deditâ operâ celatum fuisse dicant, idem hoc intelligunt à quolibet alio posse obtendi, qui sibi originem inventi arrogare cupiat. Itaque probandum quidem id foret, neque eo magis ad me tamen quicquam pertineret, nisi unà quoque ostendatur, id quod omnes latebat, mihi soli innotuisse. Et hæc quidem necessariæ defensionis causa dicenda fuere. Nunc ad ipsius automati constructionem pergamus.





HOROLOGII OSCILLATORII.

PARS PRIMA,

Descriptionem ejus continens.

FIGURA adscripta horologium à latere inspiciendum præbet, ubi primum laminæ binæ sunt *AA*, *BB*, semipedali aut paulo ultra longitudine, latæ pollices duo & semis, quarum anguli quatuor columellis coaptantur, ut sesquipollice inter se distent. His laminis rotarum præcipuarum axes utrinque inferuntur. Prima atque infima est quæ notatur *C*, dentibus 80 incisa, cujus axi orbiculus quoque *D* affixus est, aculeis ferreis asper, ut funem cum appensis ponderibus contineat, quæ qua ratione ordinentur postea dicetur. Ponderis itaque vi rota *C* vertitur; hæc movet proximum tympanum *E* dentium octo, unâque rotam *F* eodem axe hærentem, cui dentes 48. Hanc excipit tympanum aliud *G*, & in eodem axe rota *H*, quibus dentium numerus idem qui tympano rotæque præcedenti. Sed hæc rota ejus est generis quas à forma coronarias vocant artifices nostri. Hujus dentibus agitur tympanum *I* simulque rota *K*, quæ eodem axe tenetur, ad perpendiculum erecto. Tympano dentes 24; rotæ 15, atque hi ad instar ferræ dentium incisi. Supra mediam rotam *K* transversus jacet axis pinnatus *LM*, cujus extrema sustinent hinc inde gnomones *NQ* & *P*, seorsim affixi laminæ *BB*. Notanda vero in gnomone *NQ* pars deorsum prominens *Q*, quæ oblongo foramine patens transmittit axem *LM*, simulque retinet eum quem rotæ *K* tympanoque *I* communem esse diximus, inferiori sui parte gnomoni *N* innitentem. In lamina *BB* foramen amplum excavatum est, quo ultra ipsam extendatur axis pinnatus *LM*, qui subtili cuspide insertus gnomoni *P*, liberius ita moveretur quam si ab ipsa lamina *BB* sustineretur simulque ultra eam promineret, debet enim prominere necessario ut affigi possit clavula *S*, quæ simul cum eo versationes faciat. Est autem hic motus reciprocus, nunc in hanc nunc in illam partem, quum dentes rotæ *K* alternatim occurrant pinnulis *LL*, notâ vulgo ratione, quæque proinde diligentiori explicatione non indiget.

A iij

Porro clavula s , ima sui parte reflexa ac foramine oblongo rebrata, penduli virgam ferream, cui plumbum x affixum est, amplectitur. Hæc vero virga supernè duplici filo suspensa est inter geminas lamellas, quarum una t hic tantum cernitur; itaque alteram figuram juxta descripsimus, quæ utriusque formam flexumque & totam hanc suspendendi penduli rationem exprimeret. Quanquam de vera laminarum istarum curvatura pluribus postea agendum erit.

Nunc autem ut de motu horologii dicamus, nam reliquas figuræ partes postea exequemur, facile equidem apparet & vi rotarum, à pondere tractarum, perpendiculi v x motum sustentari, postquam semel manu incitatum fuerit; & simul perpendiculi statos recursus rotis universis, totique adeo horologio movendi legem normamque præscribere. Clavula enim, quantumvis levi rotarum impulsu acta, non tantum obsequitur trahenti perpendiculo, sed & singulis recursibus paulisper ejus motum adjuvat, atque ita perennem reddit, qui alioqui sua sponte, vel verius occursum aëris, deficeret paulatim, vergeretque ad quietem. Rursus vero, quum ejusmodi sit natura penduli ut eodem semper tenore feratur, neque ab eo ulla ratione præterquam mutata longitudine dimoveri possit; utique postquam flexu lamellarum, inter quas suspensum est, æqualitatem illam consequuti fuimus; nequaquam permittitur rotæ k , ut nunc citius nunc tardius incedat, etsi sæpe, ut in vulgaribus horologiis, id facere conetur; sed necessario singuli dentes ejus coguntur æqualibus transire temporibus. Hinc vero manifestum est, & reliquarum quæ præcedunt rotarum, & denique etiam indicum æquabiles conversiones effici, cum omnia proportionaliter moveantur. Quamobrem siquid in fabrica vitij fuerit, vel, ob aëris mutatam temperiem, difficilius rotarum axes volvantur; dummodo non eo usque ut omnis horologii motus interrumpatur; nulla propter hæc inæqualitas aut motus retardatio timenda erit, semperque aut rectè tempus metietur aut omnino non metietur.

Indices porro hoc pacto circumaguntur atque ordinantur. Tertia lamina prioribus parallela est $y y$, pollicis quarta parte distans ab ea quæ notatur $A A$. In ea circuli horarij descripti sunt centro eodem x quo protenditur axis rotæ c . Quorum circulorum interior duodecim horarum divisionem habet, alter scrupulorum 60. Axi vero rotæ c aptatur, ultra laminam $A A$, rota β , tubo coherens qui usque ad E continuatur trans laminam $y y$; atque ita

insidet axi illi , ut una cum illo circumferatur ; sine illo tamen , ubi DESCRIPTIO
HOROLOGII.
opus fuerit , converti possit. Ad ϵ index imponitur , horæ spatio circuiturus atque ita scrupula prima , seu sexagesimas horarum , demonstraturus. Rota vero quam diximus β , aliam rotam , totidem quot ipsa habet dentium , impellit , atque una affixum ei tympanum cui dentes sex , axiculo eorum communi hinc laminâ λ , inde gnomone δ suffulto. Hoc tandem tympano rota ζ movetur , dentes habens 72 , tubulumque affixum qui & ipse ultra laminam χ ad θ porrigitur , paulo citra quam desinit tubulus rotæ β , quem intra se complectitur. Parte extrema θ apponitur horarius index , brevior aliquanto illo quem scrupula prima signare diximus , cum interiore gyro ferri debeat. Secunda vero scrupula ut absque errore demonstrentur , imponitur axi rotæ η , usque ad laminam χ producto , orbis λ , cui circulus in sexaginta partes divisus inscribitur , incisioque in laminâ χ foramine ad z , eæ divisiones , cuspide in summo foramine defixâ , prætereuntes notantur. Hæc vero tota indicum circulatorumque horariorum dispositio ex figura minori clarius perspicitur , exteriorum horologij formam referente.

Cæterum penduli longitudinem , rotis quemadmodum diximus ordinatis , eam esse oportet ut scrupula secunda singulis recursibus metiatur , quæ longitudo tripedalis est , cumque commodè in schemate exhiberi nequiret , ejus quintam partem à suspensione summa , ubi incipit flexus laminæ τ , ad usque centrum ponderis x expressimus. Tripedalem dico , non alicujus respectu pedis qui apud Europæ gentem hanc illamve in usu sit , sed certo æternoque pedis modulo ab ipsa hujus penduli longitudine desumpto , quem **P E D E M H O R A R I U M** in posterum appellare liceat , ad illam enim omnium aliorum pedum mensuræ referri debent quas incorruptas posteris tradere voluerimus. Neque enim , verbi gratiâ , ignorabitur unquam venturi sæculi Parisini pedis modus , dum constabit eum ad Pedem Horarium esse ut 864 ad 881. Sed de hujus mensuræ exactissima constitutione pluribus agemus in iis quæ de Centro Oscillationis. nunc tempora conversionum in singulis rotis indicibusque obiter designabimus , ut rectè omnia ad dentium supra descriptorum numerum quadrare intelligantur.

Ergo una quidem conversione rotæ c , decies circumire apparet rotam f , sexagesies vero rotam h , & centies vicies supremam m k : cui quum dentes sint quindecim , iisque alternatim pulsantur pin-

nulæ L , una conversione rotæ K numerabuntur ictus 30, quibus respondent totidem itus reditusque penduli V X . ideoque conversionibus 120, respondebunt oscillationes simplices 3600, qui numerus est scrupulorum secundorum unam horam efficientium. Itaque horæ tempore semel circumit rota C , cumque ea simul index ad E impositus, qui scrupula prima demonstrat. Et quoniam eodem temporis spatio etiam rota β , & per eam γ , convertitur, cum tympanidio suo dentium sex, ad quem numerum duodecuplus est numerus dentium rotæ ζ , apparet duodecim demum horis hanc circumduci, totidemque indicem illi conjunctum in θ . Denique cum rotæ H sexaginta conversiones respondere ostenderimus singulis conversionibus rotæ C , hinc illa, una cum affixo orbe λ , sexages in singulas horas circumferetur, hoc est, semel unius scrupuli primi tempore, ideoque partes sexagesimæ orbiculi λ secunda scrupula transitu suo ostendent: atque ita omnia rectè se habere manifestum erit. Ponderus X in imo perpendiculo trilibre est, plumbeum totum, vel ænea superficie plumbum continente. Nec tantum metalli gravitate sed & figurâ insuper prospiciendum (plurimi enim refert) ut quam minimum occursum aëris impedimentum sentiat. Eoque in cylindri jacentis oblongi & utrinque præacuti formam fingitur, qualis cernitur ad a schemate horologij minore. Quanquam in his quæ ad navigationem parantur, forma lentis erectæ aptior visa est.

Porro eodem schemate & ponderis alterius b , quo motus horologij continuatur, suspendendi ratio expressa est, quam, incognitam prius, investigare nobis necesse fuit, ne interim dum sursum retrahitur ponderus istud, cessaret vel impediretur aliquatenus horologij cursus, quod hic omnino cavendum erat. Paratur itaque funis continuus atque in se rediens, extremitatibus apte inter se connexis. Is primum orbiculum rotæ infimæ conjunctum, qui in schemate majori notatus est D , amplectitur; inde descendens, altera sui parte trochleam c , cui ponderus b appensum est, subit. Hinc super orbiculum d ascendit, extrinsecus horologio affixum, qui ferreos per circumferentiam aculeos habet, atque insuper ferratis dentibus ita est aptatus ut volvatur tracto fune e ; nequaquam vero in partem contrariam revolvi possit. Ab hoc orbiculo descendit funis ad alteram trochleam f , cui ponderus exiguum g appenditur, quantum sufficit continendo majori b , ne aliter quam revolutio orbiculo descendat. Namque à trochlea f rursus ad ipsum orbiculum d , unde descenderat, funis revertitur. Quibus ita se

se habentibus, manifestum est semper pondus b dimidia sui gravitate conari ut rotas horologii circumagat, nec tunc quidem cessare cum manu funem e trahente ascendere cogitur; adeoque horologii motum nusquam interrumpi, nec momentum temporis deperdi.

Gravitatis modus in pondere b definiri certo non potest, sed quo minor conservando motui suffecerit, eo melius accuratiusque fabrefactum automaton arguet. In nostris, quæ optima hactenus habemus, ad sex libras redactum est, posita nimirum orbiculi D diametro pollicari fere, uti exhibita fuit; item perpendiculi pondere trilibri, ac totidem pedum longitudine. Quæ longitudo, ut hoc etiam admoneamus, trans capsam horologii dependet, oblongo foramine perviam, quantum oscillationibus peragendis necesse est. Ipsum vero horologium, ad hominis altitudinem suspensum, horis 30 moveri perseverat.

Superest nunc forma lamellarum describenda inter quas perpendiculum affigi diximus, quarumque ad æquabilem horologio motum præstandum vel præcipua est opera. Absque his enim Penduli simplicis oscillationes (etsi nonnullis aliter visum est) non erunt æque diuturnæ, sed brevioris temporis eæ quæ per minores arcus incedent; idque primùm experimento hujusmodi facile deprehenditur. Si enim fila accipiantur ejusdem longitudinis duo, paribusque in parte ima ponderibus religatis, utrumque seorsim suspendatur, tumque alterum eorum procul à linea perpendiculari, alterum parumper duntaxat extrahatur, simulque è manu dimittantur; non diu utrumque simul in partes easdem ferri videbitur, sed prævertet illud cujus exiliores erunt recursus. Sed & temporum per quoslibet arcus rationes numeris definiri possunt, certâ scientiâ nixis, & vero quam libuerit propinquis, veluti quod tempus descensus per totum circuli quadrantem est ad tempus per arcum minimum fere ut 34 ad 29. Adeo ut nequaquam resistantiæ aëris ea diversitas imputanda sit, ut quidam voluere, sed ex ipsa motus naturæ circuli proprietate nascatur. Quod alio quoque argumento concludi possit ex ipsa Penduli isochroni constructione, ubi à circulari linea haud parum receditur, uti mox patebit.

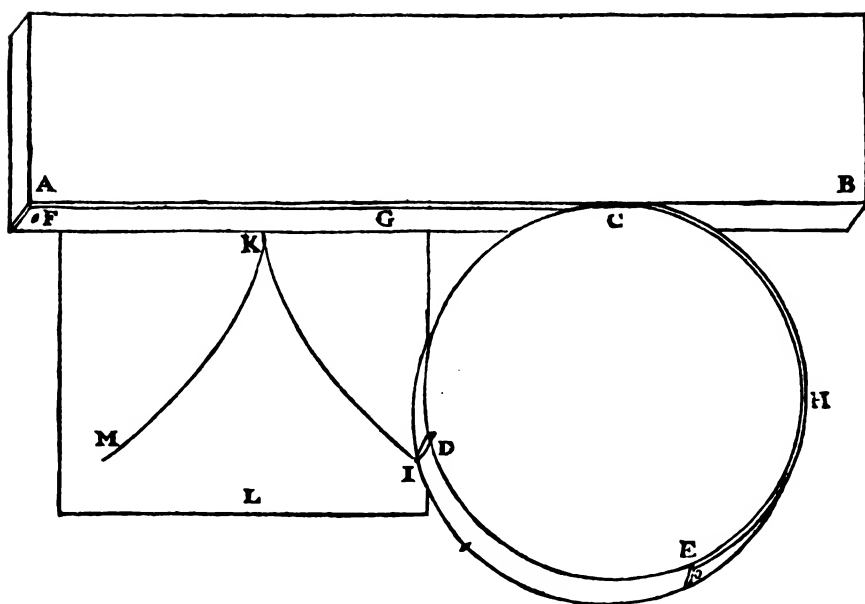
Sed videatur forsitan in nostris horologiis hisce, ubi eadem semper est oscillationum latitudo, nullius momenti futura quam diximus inæqualitas, adeoque nec correctione ulla perpendiculi opus fore. Quod sane ita esset si latitudo omnium planè eadem

constanter maneret. Sed cum pauxillum quandoque excedat vel deficiat, ex multis minimis differentiis tandem magna satis conflatur, idque ita esse reipsa atque experimentis evincitur. Etsi enim eadem semper sit ponderis vis, rotæ sibi proximæ respectu, tamen per tot alias transdita, quantâcunque curâ limatæ fuerint, non semper eadem ad perpendicularum usque pervenit. Præterquam quod frigore quoque difficilior motus rotarum efficitur; itemque evanescente aut sordescente quod illis additur oleo. Sed præcipue inæquales fiunt oscillationes horologiis quæ mari vehuntur, ob jactationem navis continuam, adeo ut omnibus quidem in universum, sed his maxime omnium remedio opus sit, quo reciprocationum Penduli latiorum angustiorumque tempora æqualia evadant.

Ad definiendam ergo lamellarum formam in quibus positum est remedium istud, in primis Penduli longitudinem statuisset oportet, quæ facile ex eo habetur, quod sint inter se longitudines perpendicularorum, sicut temporum quæ in singulos recursus impenduntur quadrata. Adeo ut cum tribus pedibus defini-verimus longitudinem perpendiculari quod scrupula secunda metitur, ejus quarta pars, sive uncia novem debeantur ei quod semisecunda notaturum sit. Item si Penduli longitudo quæretur, cujus recursus simplices 10000 horæ spatio peragantur, hoc modo ratio inibitur. Penduli nempe tripedalis scimus 3600 recursus in horas singulas numerari: ergo hujus recursuum tempora singula, majora sunt temporibus Penduli quæsi, proportionem 10000 ad 3600, sive 25 ad 9. Quare ut quadratum numeri 25 ad quadratum 9, hoc est, ut 625 ad 81, ita erit longitudo pedum 3 ad eam quæ quærebatur, nempe uncia 4 cum $\frac{66}{100}$.

Posita ergo longitudine perpendiculari, puta pedum trium in horologio à nobis proposito, inde Cyclois linea, quæ curvaturam laminarum τ datura est, hoc modo describetur.

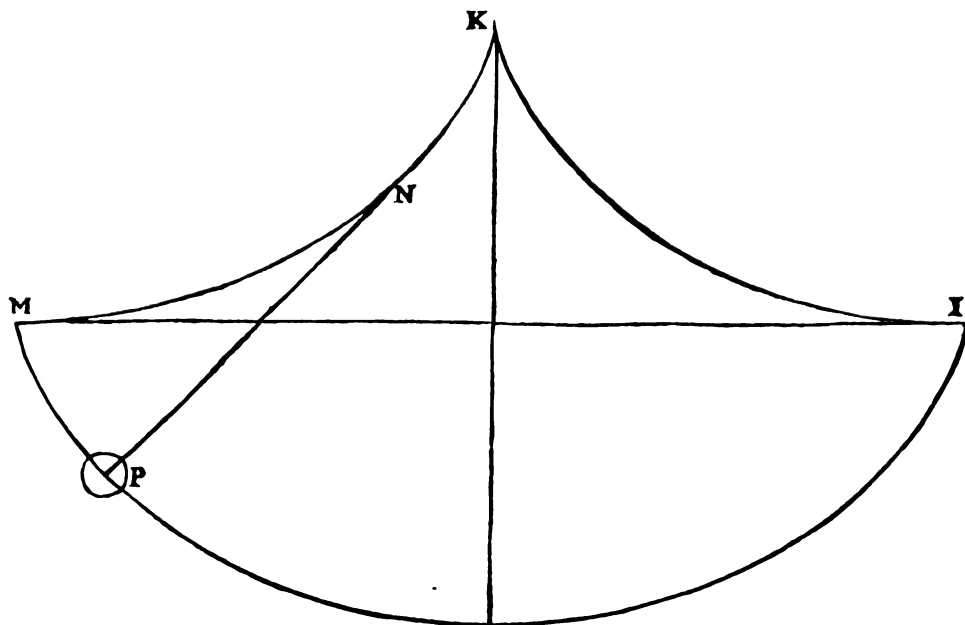
Super tabula plana affigatur regula AB , semidigiti crassitudine. Deinde fiat cylindrus CDE eadem illa altitudine, diametrum vero baseos, dimidiæ perpendiculari longitudini, æqualem habens; sitque FGE fasciola, seu potius bractea tenuis, affixa regulæ in F , cylindro verò in circumferentiæ puncto aliquo E , ita ut partim huic circumvoluta sit, partim extendatur juxta latus regulæ AB . Cylindro autem infixa sit ferrea cuspis DI , pauxillum ultra basim inferiorem prominens, atque ita ut circumferentiæ ejus exacte respondeat.



His ita se habentibus, si cylindrus secundum regulam AB volvatur, bracteolæ tantum FG crassitudine intercedente, eâque semper quantum potest extensâ, describet cuspis I in subiecto tabulæ plano lineam curvam KI , quæ Cyclois vocatur. Circulus vero genitor erit CDE , cylindri adhibiti basis. Quod si jam laminam KL ad regulam AB applicuerimus; exaratâ primum in ea cycloidis portione KI , invertemus deinde ipsam, & in superficie adversa similem lineam KM , ab eodem puncto K egredientem, incidemus. Tum figuram MKI , accurate secundum lineas istas, efformabimus, cui figuræ lamellarum interstitium aptari oportet, inter quas perpendiculum suspenditur. Sufficiunt autem ad horologiorum usum portiones exiguæ arcuum KM , KI ; reliquo flexu inutili futuro, ad quem perpendiculi filum accedere non potest.

Verum, ut mirabilis lineæ natura atque effectus plenius intelligantur, integras semicycloides KM , KI , alio schemate hic exprimere visum fuit, inter quas suspensum agitatumque Pendulum KNP , diametri circuli genitoris duplum, cujuscunque amplitudinis oscillationes, usque ad maximam omnium per arcum MPI , iisdem temporibus confecturum sit: atque ita, ut appensæ spheræ P centrum, in linea MPI , quæ & ipsa cyclois integra est, semper versetur. Quæ proprietas insignis, nescio an alii præter hanc lineæ data sit, ut nempe se ipsam sui evolutione describat. Hæc autem quæ dicta sunt, in sequentibus, ubi de descensu gravium, deque evolutione curvarum agemus, singula demonstrabuntur.

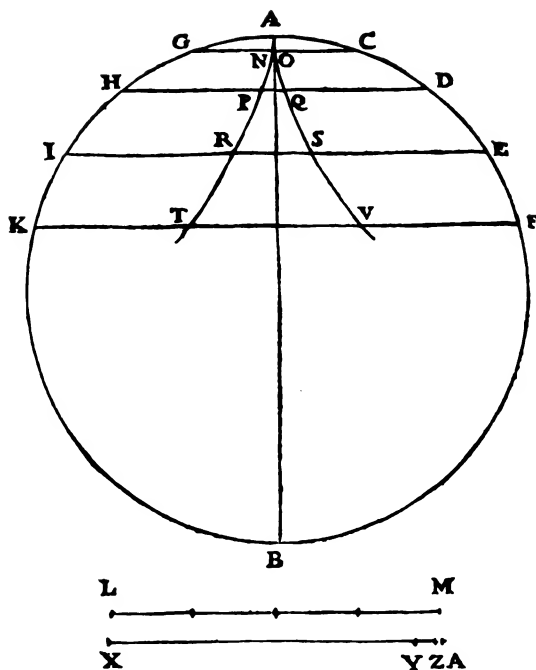
B ij



Licebit autem aliter quoque, per inventa puncta, cycloidem designare. Describatur circulus diametro AB , quæ dimidiæ longitudini perpendiculi æqualis sit. In cujus circumferentia sumptis partibus æqualibus quotlibet, $AC, CD, DE, EF, AG, GH, HI, IK$, jungantur GC, HD, IE, KF , quæ erunt inter se parallelæ. Deinde arcui AF sumatur æqualis linea recta LM , eaque in partes æquales totidem dividatur quot sunt in arcu AF , earumque partium uni æquales ponantur singulæ CN, GO in recta CG , duabus vero partibus rectæ LM , æquales fiant singulæ DP, HQ in recta DH . Tribus vero, singulæ ER, IS in recta EI ; atque ita porro si partes plures fuerint acceptæ; ac tandem toti LM æquales fiant singulæ FT, KV in linea extrema FK . Iam si curvæ describantur per puncta $A O Q S V, A N P R T$, hæ rursus quæsitæ cycloidis partes erunt, inter quas perpendiculum affigi oportet.

Recta autem LM æqualis arcui AF invenitur, si primum duabus rectis, quæ semissibus arcus AF subtenduntur, æqualis ponatur xy , totius vero arcus subtensæ AF æqualis ab eodem termino accipiat xz , differentiæque yz triens $z\Delta$ ad totam xz adponatur. Nam tota $x\Delta$ toti arcui AF tam prope æqualis erit, ut licet sextans fuerit circumferentiæ, (neque major hic unquam requiritur) non una sexies millesima parte suæ longitudinis deficiat, uti in his, quæ de Circuli Magnitudine antehac scripsimus, demonstratum est.

Explicitis quæ ad horologii fabricam attinent, nunc quoque illud declarandum est, quo pacto ad veram horarum mensuram componi debeat. Ergo primum, an recte se habeat motus ejus, hoc modo examinabitur.



Oculo observatoris certus eligatur locus, unde sidera despici possint, simulque recta parietesve vicinarum ædium, sic posita, ut, cum eò appulerint stellæ quædam è fixarum numero, simul videri definant. Eo loco foramen, ad pupillæ magnitudinem, constitua-
tur, ut sequentibus diebus, absque errore, oculus ad idem punctum reponi possit. Iam ad momentum ipsum, cum stellarum aliqua è conspectu abit, notetur tempus horologio indicatum. Atque idem postero die, vel potius aliquot diebus intermissis, fiat. Quod si tantum unius diei spatium duabus observationibus intercesserit, oportet in postrema observatione tempus horologii deficere ab illo, quod prima observatione annotatum fuerat, scrupulis primis 3, secundis 56. Ita enim rectè se habere perpendiculi longitudi-
nem constabit; quum tanto superetur quælibet siderum fixorum revolutio à die solari mediocri. Mediocri dico, quoniam dies sola-
res, de medie ad meridiem, non omnes inter se æquales sunt, ut mox amplius exponetur. Si vero post plures demum dies observa-
tio repetatur, in singulos tantundem differentiæ causa computan-
dum erit. Sit, exempli gratiâ, in prima observatione, ad momen-
tum evanescentis stellæ, adnotata horologii hora 9, cum scrupu-
lis primis 30, secundis 18; deinde, septimo post die, eâdem dispa-
rente stellâ, indicet horam 8, cum scrupulis pr. 50, sec. 24. Hæc
hora deficit à priorescrupulis pr. 39, secundis 54. Quæ, in septem
divisa, dant retardationem diurnam scrupulorum 5'. 42". Debebat
autem esse scrupulorum 3'. 56". quæ illâ minor est scrupulis 1'. 46".

Itaque tantundem quotidie deficit horologium à vera, seu media, dierum mensura.

Cæterum alio quoque modo, ad solem, horologii motum examinare licebit. Sed hic jam inæqualitatis dierum naturalium ratio habenda erit. Sunt enim, ut jam dixi, non omnes ejusmodi dies inter se æquales; & quanquam exiguum sit discrimen, tamen plurium dierum intervallo sæpe eo usque excrescit, ut haudquaquam contemni possit. Etenim si & solarium quam perfectissime descriptum habeatur, & horologii automati motus ad verissimam dierum mensuram exactus sit, neque ab ea recedat; eveniet tamen necessario ut, certis anni temporibus, sæpe horæ quadrante, aut etiam semihora, inter se discrepent, ac rursus statis temporibus ultro concordent. Hoc enim ita esse, ex tabula temporis æquatoria quam subjicimus, intelligetur; postquam usum ejus ostenderimus, qui est hujusmodi.

Accipiatur æquatio tabulæ, assignata diei qua primum cum sole, sive cum sciotherico, horologium ut conveniret fecimus. Itemque æquatio diei, qua quæritur quam bene ad dierum mensuram temperatum sit. Quod si jam prior æquatio major fuerit sequente, superare debet hora automati horam gnomonis eo, quo inter se æquationes istæ differunt. At si posterioris diei æquatio major inveniat, erit excessus penes horam gnomonis, sive eam quæ ex sole observatur. Vt si, exempli gratia, die 5 Martii in eandem horam convenient sciothericum horologium atque automaton, cujus diei æquatio invenitur, in tabula, scrupulorum primorum 3, secundorum 11. lubeatque scire ejusdem mensis die 20, an automaton horas æquales rectè metiatur necne: invenietur die posteriori adscripta æquatio scrupulorum primorum 7, secundorum 27. quæ quia superat præcedentem scrupulis primis 4, secundis 16, debet tanto serior esse hora sciotherici, quam quæ automato indicatur. Vnde, si diversum reperiatur, facile inde colligetur, quantum in dies singulos exuperet automaton, aut retardet.

In computanda tabula hac duplicem causam adhibui, utramque Astronomis notam, Eclipticæ nimirum obliquitatem, & solaris motus anomaliam. Quod cum ratio postulat, tum experientia quoque, his ipsis horologiis superstructa, quæque sine his nequaquam haberi poterat, evincit; quandoquidem, cum æquatione hic proposita, observationes solis, quas sæpe per complures menses, quotidie ad momentum quo meridianum circulum sol occuparet, instituimus, planissime consentire inventæ sunt.

TABULA ÆQUATIONIS DIERUM.

Dier.	Januar.		Febr.		Mart.		Apr.		Maij.		Iun.		Iul.		Aug.		Sept.		Octob.		Nov.		Dec.	
	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.
1	10	40	0	32	2	35	11	18	18	32	18	10	12	19	10	4	16	23	26	30	31	55	25	34
2	10	10	0	24	2	28	11	37	18	39	18	1	12	8	10	8	16	42	26	49	31	55	25	10
3	9	41	0	18	2	42	11	56	18	46	17	51	11	58	10	13	17	1	27	8	31	55	24	45
4	9	13	0	13	2	56	12	15	18	53	17	41	11	48	10	18	17	21	27	26	31	54	24	20
5	8	45	0	9	3	11	12	34	18	59	17	30	11	38	10	23	17	41	27	43	31	50	23	55
6	8	17	0	6	3	26	12	53	19	4	17	19	11	28	10	28	18	1	28	0	31	47	23	30
7	7	50	0	3	3	41	13	32	19	9	17	8	11	18	10	34	18	21	28	16	31	43	23	4
8	7	23	0	1	3	56	13	31	19	14	16	57	11	9	10	41	18	41	28	32	31	37	22	38
9	6	58	0	0	4	12	13	49	19	18	16	46	11	0	10	49	19	1	28	47	31	30	22	11
10	6	34	0	0	4	29	14	6	19	22	16	35	10	52	10	58	19	21	29	2	31	22	21	43
11	6	10	0	0	4	46	14	23	19	25	16	24	10	47	11	7	19	41	29	16	31	13	21	14
12	5	47	0	2	5	4	14	39	19	28	16	13	10	38	11	16	20	1	29	30	31	3	20	44
13	5	24	0	4	5	22	14	55	19	29	16	1	10	31	11	25	20	22	29	43	30	53	20	14
14	5	2	0	8	5	40	15	10	19	29	15	49	10	25	11	36	20	43	29	56	30	43	19	44
15	4	41	0	12	5	58	15	25	19	29	15	37	10	19	11	48	21	4	30	9	30	32	19	14
16	4	21	0	16	6	16	15	39	19	28	15	24	10	13	12	1	21	25	30	22	30	20	18	44
17	4	2	0	21	6	33	15	59	19	26	15	11	10	7	12	14	21	47	30	34	30	8	18	14
18	3	44	0	26	6	51	16	7	19	24	14	58	10	2	12	28	22	9	30	45	29	55	17	44
19	3	27	0	32	7	9	16	21	19	21	14	45	9	58	12	42	22	31	30	55	29	40	17	14
20	3	11	0	40	7	27	16	34	19	18	14	32	9	54	12	57	22	52	31	4	29	23	16	44
21	2	55	0	48	7	45	16	47	19	15	14	19	9	51	13	12	23	13	31	12	29	6	16	14
22	2	39	0	57	8	3	16	59	19	11	14	6	9	49	13	27	23	33	31	19	28	48	15	44
23	2	23	1	6	8	22	17	11	19	7	13	53	9	47	13	43	23	33	31	26	28	30	15	14
24	2	7	1	16	8	41	17	22	19	2	13	40	9	46	13	59	24	13	31	32	28	11	14	43
25	1	52	1	26	9	1	17	33	18	57	13	27	9	46	14	16	24	33	31	38	27	51	14	12
26	1	38	1	37	9	21	17	43	18	51	13	15	9	46	14	33	24	33	31	43	27	30	13	41
27	1	25	1	49	9	41	17	53	18	45	13	3	9	47	14	50	25	33	31	47	27	8	13	10
28	1	13	2	1	10	1	18	3	18	39	12	52	9	49	15	8	25	35	31	50	26	45	12	40
29	1	2	2	2	10	21	18	3	18	33	12	41	9	52	15	26	25	35	31	53	26	22	12	10
30	0	51			10	40	18	23	18	26	12	30	9	56	15	45	26	31	31	55	25	58	11	40
31	0	41			10	59			18	18			10	0	16	4	31		31				11	10

Iam postquam utrovis modo eorum quos diximus, sed priore potius, examen institutum fuerit, si multum aberrare à media dierum longitudine horologium reperiatur, adeo ut differentia ultra tria quatuorve prima scrupula ascendat, remedium adhibebitur aucta aut diminuta ipsius penduli longitudine. Vbi hæc tenenda est regula, tot scrupulis primis, in singulos dies, motum horologij acceleratum aut retardatum iri, quot $\frac{7}{10}$ unius lineæ auferentur pendulo aut addentur. Cumque ad veram mensuram hoc pacto iam prope reductum erit, reliqua correctio transpositione exigui ponderis Δ , virgæ v v adhærentis, commode perageretur. Id pondus lentis formam habet, cujus sectionem secundum axem in figura I expressimus. Et quia tantum vicesimam tricesimamve partem æquat ponderis x , hinc fit ut sat magnis spatiis è priore loco discedens, haud multum tamen perpendiculi motum afficiat, accelerando nempe quoties versus mediam virgæ longitudinem attrahitur, retardando cum inde sursum aut deorsum movetur. Ne vero diu punctum illud quærendum sit quo verissimam daturum sit dierum mensuram, divisimus certa ratione, ex motus legibus petita, inferiorem virgæ medietatem, posito nimirum pondere Δ parte quinquagesima ponderis x , parique gravitate ipsius virgæ v v . Quæ quidem divisiones figura IV exhibentur, ubi penduli portio inferior in tres partes secta cernitur, quarum, quæ infimo loco ponenda, est AB . Punctum A est centrum gravitatis ponderis x , à puncto autem C , partes singulæ, quindecim scrupulorum primorum differentiam diurnam efficiunt, ubi tali intervallo mota fuerit lens Δ . Demonstratio autem divisionumque inventio, dabitur in iis quæ de Centro Oscillationis.

Cæterum illorum quoque quæ mari vehuntur, longitudinum investigandarum gratiâ, formam hic describeremus, si quænam maxime ad hunc usum accommodata sit, æque ac in præcedentibus, exploratum determinatumque haberemus; etsi quidem jam nunc eo res deducta sit, ut parum deesse videatur ad perficiendum tantæ utilitatis inventum. Quid autem & qua fortuna hic tentatum fuerit, quidve deinceps tentandum restet, exponere non pigebit.

Prima duo huiusmodi horologia Britannica navi vecta fuere anno 1664, quæ vir nobilis è Scotia nobisque amicus ad nostrorum exemplum fabricari curaverat. Hæc ponderis loco laminam chalybeam habebant in spiram convolutam, cujus vi rotæ circumagerentur,

cumagerentur, quemadmodum in exiguis illis quæ circumferri solent automatis adhiberi solent. Vt autem jactationem navis perferre possent, è chalybea pila, cylindro æneo inclusa, horologia suspenderat, clavulamque quæ penduli motum continuat (erat autem semipedali longitudine pendulum) deorsum productam geminaverat, ut literæ R inverſæ formam referret; ne videlicet in gyrum evagari posset penduli motus, unde cessationis periculum. Navis hæc, cum tribus aliis quas itineris socias habuerat, postquam in Britanniam reversa est, Præfectus classis hæc retulit. Se nempe, cum à Guineæ littore solviſſet, atque ad insulam, sancti Thomæ dictam, perveniſſet, quæ æquinoctiali circulo subjacet, compositis hic ad solem horologiis, occidentem versus cursum instituiffe, atque ad septingenta circiter miliaria continuo tramite progressum, tum rursus vento favente Libonoto ad Africæ littora declinaviſſe. Cum autem ad ducenta trecentave miliaria eò cursum tenuiſſet, magistros aliarum navium, veritos ne priusquam Africam attigiſſent aquâ ad potum deficerentur, suaviſſe ut ad insulas Americanas, Barbatorum dictas, aquandi gratiâ deflecteret. Tum sese concilio nauclerorum habito, jussiſſeque ut Ephemeridas ac supputationes singuli suas proferrent, reperiſſe cæterorum calculos à suis diversos abire, unius quidem 80 miliaribus, alterius centenis, tertii amplius etiam. Ipsum vero, cum ex horologiorum indicio collegiſſet non amplius quam triginta circiter miliaribus abesse insulam *del Fuego* dictam, quæ una est earum, non procul ab Africa distantium, quæ à Viridi promontorio nomen habent, eamque postero die teneri posse; confisum pendulis suis eò cursum dirigi imperaſſe, ac die inſequenti sub meridiem eam ipsam in conspectum veniſſe insulam, paucisque post horis navibus stationem præbuiſſe. Et hæc quidem ex Præfecti illius relatu.

Ab eo vero tempore aliquoties tum Batavorum tum Gallorum opera, idque Regis Serenissimi jussu, repetita fuere experimenta, vario eventu, sed ita ut sæpius negligentia eorum quibus horologia commiſſa erant quam ipsamet automata culpari possent. Optimus vero successus fuit in Mediterraneo mari, expeditione in Cretam insulam, quò illustrissimus Dux Belfortius, Candix à Turcis obſeſſæ auxilium laturus, cum Gallorum copiis miſſus erat, ubi & in prælio occubuit. Is in ea qua vehebatur navi, horologia hujusce experimenti gratiâ habebat, virumque Aſtronomiæ peritum iis præfecerat, è cujus observationibus, in singulos dies habitis, longitudines locorum ad quæ in ea profectione aut appulerunt na-

ves, aut quæ prætervecti dignoscere oculis potuerant, horologiorum operâ exacte dimensas fuisse comperimus, atque ita ut Geographicis descriptionibus quæ melioris notæ habentur eademmet longitudinum differentiæ designatæ reperiantur. Namque inter Toloni portum Candiamque oppidum differentia hor. 1. scrup. 22' reperta fuit, hoc est graduum longitudinis 20. scrup. 30'. ac rursus à Candia Tolonum revertentibus differentia proxime eadem. qui consensus certissimum veritatis est indicium.

Inter eundem Toloni portum & insulam quandam cui *Mare-timo* nomen est, prope promontorium Siciliae quod Occidentem spectat, Lilybæum olim vocatum, differentia horaria observata est scrup. prim. 25, sec. 20, quibus respondent gradus longitudinis 6, scrup. 20'. Item à Tolono ad insulam *Sapienza* dictam, quæ juxta Peloponnesum est Occidentem versus, hora 1, scrup. prima 5', sec. 45'', quibus respondent longitudinis gradus 16, scrup. 26.

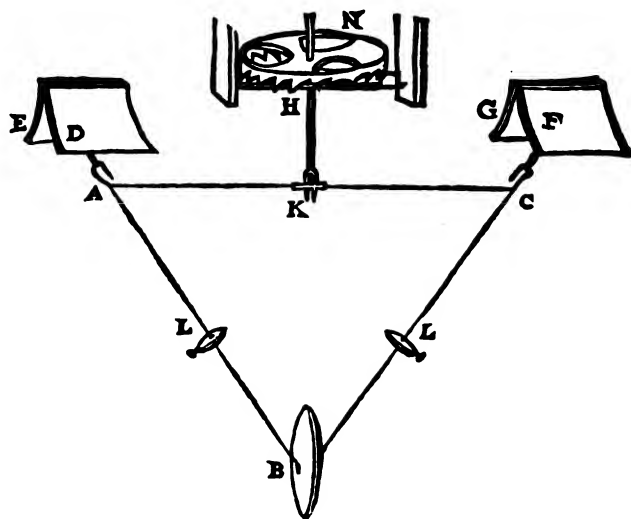
Horologia ad solem examinata fuerant, mane ad Orientem, vespere ad Occidentem, supputato ex data poli altitudine utroque temporismomento. Atque hæc ratio cum naves in anchoris stant omnium optima videtur, quod, absque instrumentorum ope, solis oculis eæ observationes peragantur.

Pendulum vero unciarum novem longitudine inerat horologiis hisce, pondere semissis. Rotæ ponderum attractu circumagebantur, eademque cum illis theca inclusæ erant quaternum pedum longitudine. In ima theca plumbum insuper centum atque amplius librarum additum erat, quo melius perpendicularem situm suspensa in navi machina servaret.

Quamquam autem æquabilis admodum sibi que constans automati motus per hæc experimenta comperiebatur, tamen alia quoque ratione ulterius illud perficere aggressi sumus, quæ erat hujusmodi. Rotæ illi quæ ferratos dentes habet, penduloque proxima est, pondus exiguum ex catenula affabre constructa appendimus, quo sola ipsa moveretur, reliqua omni machina nihil aliud agente quam ut singulis semiscrupulis horariis plumbum illud exiguum ad priorem altitudinem restitueret; eadem fere ratione atque in constructione horologii superius exposita videre est, ubi pondus altero fune attollitur, dum altero gravitatem suam horologii motui impertit. Quibus ita constructis, cum veluti ad unicam rotam omnia essent redacta, major adhuc quam antea apparuit horologiorum æqualitas, illudque accidit memoratu dignum, quod cum duo ad hanc formam constructa ex eodem tigno suspendissemus, tignum vero fulcris duobus impositum esset; motus penduli

utriusque ita ictibus adversis inter se consensere, ut nunquam inde vel minimum recederent, sed utriusque sonus una semper exaudiretur: imo si data opera perturbaretur concordia illa, semetipsam brevi tempore reduceret. Miratus aliquandiu rem adeo insolitam, inveni denique, instituto diligenti examine, à motu tigni ipsius, licet haudquaquam sensibili, causam petendam esse. Nempe pendulorum reciprocationes horologiis, quantolibet pondere gravatis, motum aliquem communicare; hunc vero motum, tigno ipsi impressum, necessario efficere ut si aliter quam contrariis ad unguem ictibus pendulum utrumque moveatur, eo tamen necessario tandem deveniant, ac tum demum tigni motum penitus interquiescere. Quæ tamen causa non satis efficaciam haberet, nisi & horologiorum motus aliunde æquabilissimus foret atque inter se consentiens.

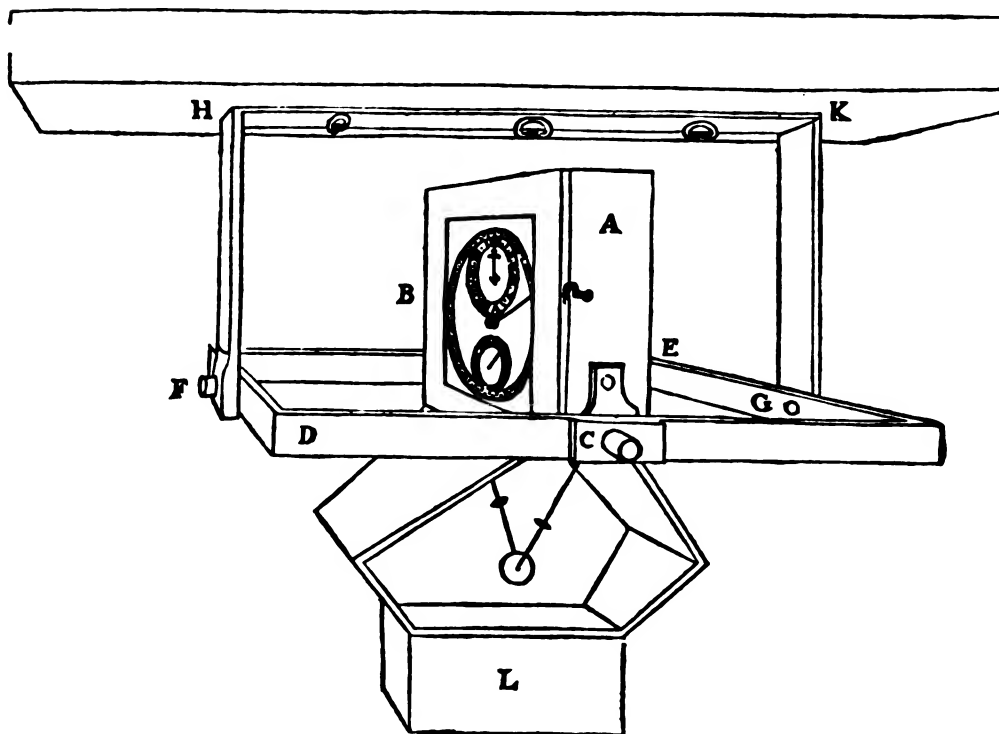
Cæterum experimentis in Oceani navigatione habitis, ac præsertim procella vehementiore aquas agitante, compertum fuit primam ac præcipuam curam de motu horologiorum absque interruptione conservando habendam esse, quod jactationem navis tantam ægrè tunc perferre illa animadversum sit. Quamobrem nova denique ratione & penduli formam immutavimus, & aliter horologia ipsa suspendimus. Pendulum trianguli formam habet, in



cujus vertice deorsum spectante plumbea lens affixa est. Anguli utrique reliqui filis inter laminas cycloides suspensi sunt. Basis clavulam bifurcatam puncto sui medio recipit ab eaque movetur, illa vero ab rota ferrata horizonti parallela motum accipit. Motus rotarum omnium non à pondere sed à chalybea lamina, tympano inclusa, principium habet. In figura adjecta pendulum triangulare est A B C; lens plumbea B; laminæ cycloides E D, F G. Clavula

C ij

bifurcata HK; rota ferratis dentibus N, quæ cæteris horologii rotis inferior est. Lenticulæ ad temperandum penduli motum LL.



Suspensionis modum altera hæc figura exhibet; ubi theca A B axibus primum duobus, quorum alter C tantum apparet, rectangulo ferreo D E inserta est; quod deinde rectangulum rursus axibus suis F G ferreo gnomone F H K G sustinetur, qui contignationi navis immobiliter affixus est. in ima theca pondus 50 librarum appensum est. Quibus ita se habentibus, quacunque navis inclinatione perpendicularem positum servat horologium. Axis autem C, cum sibi opposito, ita collocati sunt, ut ad rectam lineam respondeant punctis suspensionum penduli ejus quod diximus: quo fit ut motus ipsius oscillatorius machinam nequaquam commovere possit, quo nihil est alioqui quod magis penduli motum destruat. Porro axium C C, & F G crassitudo, quæ pollicem æquat, gravitasque plumbi inferius appensi, nimiam movendi libertatem horologio adimunt, faciuntque ut si forte succussu navis graviore commotum fuerit, continuo ad quietem perpendicularisque suum revertatur.

Et hæc quidem ita adaptata machina ut in mare deducatur experientiaque committatur superest, quæ & certam pene successus spem præbet, quod iis quæ hæcenus instituere licuit experimentis, multo melius quam priores illæ omnem motus diversitatem perferre reperta sit.



HOROLOGII OSCILLATORII

PARS SECVNDA.

De descensu Gravium & motu eorum in Cycloide.

HYPOTHESES.

I.

S*I gravitas non esset, neque aër motui corporum officeret, unum quodque eorum, acceptum semel motum continuaturum velocitate aequabili, secundum lineam rectam.*

II.

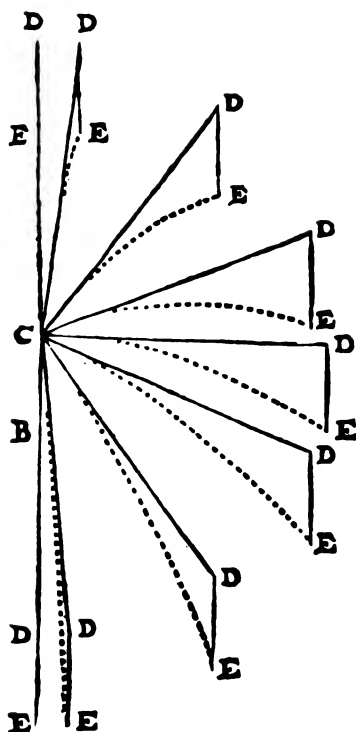
Nunc vero fieri gravitatis actione, undecunque illa oriatur, ut moveantur motu composito, ex aequabili quem habent in hanc vel illam partem, & ex motu deorsum à gravitate profecto.

III.

Et horum utrumque seorsim considerari posse, neque alterum ab altero impediri.

Ponatur grave c è quiete dimissum, certo tempore, quod dicatur F, vi gravitatis transire spatium c B. Ac rursus intelligatur idem grave accepisse alicunde motum quo, si nulla esset gravitas, transiret pari tempore F motu æquabili lineam rectam c D. Accedente ergo vi gravitatis non perveniet grave ex c in D, dicto tempore F, sed ad punctum aliquod E, recta sub D situm, ita ut spatium D E semper æquetur spatio c B, ita enim, & motus æquabilis, & is qui à gravitate oritur suas partes peragent, altero alterum non impediante. Quamnam vero lineam, composito illo motu, grave percurrat, cum motus æquabilis non recta sursum aut deorsum sed in obliquum tendit, è sequentibus definiri poterit. Cum vero deorsum in perpendiculari contingit motus æquabilis c D,

C iij



apparet lineam CD , accedente motu ex gravitate, augeri recta DE . Item, cum sursum tendit motus æquabilis CD , ipsam CD diminui recta DE , ut nempe, peracto tempore F , grave inveniat-
ur semper in puncto E . Quod si, utroque hoc casu, seorsim, uti
diximus, duos motus consideremus, alterumque ab altero nullo
modo impediri cogitemus, hinc jam accelerationis gravium ca-
dentium causam legesque reperire licebit. Et primum quidem
duo ista simul ostendemus,

PROPOSITIO I.

Æ Qualibus temporibus æquales celeritatis partes gravi
cadenti accrescere, & spatia æqualibus temporibus ab
initio descensus emensa, augeri continue æquali excessu.

Ponatur grave aliquod, ex quiete in A , primo tempore lapsum
esse per spatium AB , atque ubi pervenit in B , acquisivisse celerita-
tem qua deinceps, tempore secundo, motu æquabili, percurrere
posset spatium quoddam BD . Scimus ergo spatium secundo tem-
pore peragendum majus fore spatio BD , quia vel cessante in B
omni gravitatis actione spatium BD percurreretur. Feretur vero
motu composito ex æquabili quo percursurum esset spatium BD ,
& ex motu gravium cadentium, quo deprimi necesse est per spa-

tium ipsi AB æquale. Quare ad BD addita DE , æquali AB , scimus tempore secundo grave perventurum ad E .

DE DESCENSU
GRAVIUM.

A
B

D
E

F
G

H
K

Quod si vero inquiramus quam velocitatem habeat in E , in fine secundi temporis, eam inveniemus duplam esse debere velocitatis quam habebat in B fine temporis primi. Diximus enim moveri composito motu ex æquabili cum celeritate acquisita in B , & ex motu à gravitate producto, qui cum tempore secundo idem plane sit ac primo, ideo decursu temporis secundi æqualem celeritatem gravi contulisse debet atque in fine primi. Quare cum acquisitam in fine primi temporis celeritatem conservaverit integram, apparet in fine secundi temporis bis eam celeritatem inesse quam acquisiverat in fine temporis primi, sive duplam.

Quod si jam, postquam pervenit in E , pergeret deinceps tantum moveri celeritate æquabili, quantam illic acquisivit, apparet tempore tertio, prioribus æquali, percursum spatium EF , quod duplum futurum sit spatii BD ; quia hoc percurri diximus dimidia hujus celeritatis, motu æquabili, & temporis parte æquali. Accedente autem rursus gravitatis actione, percurreret tempore tertio, præter spatium EF , etiam spatium FG , ipsi AB vel DE æquale. Itaque in fine tertii temporis grave invenietur in G . Velocitatem vero hic habebit triplam jam ejus quam habebat in B , in fine primi temporis: quia præter celeritatem acquisitam in E , quam diximus duplam esse acquisitæ in B , vis gravitatis, temporis tertii decursu, æqualem rursus atque in fine primi celeritatem contulit. Quamobrem utraque celeritas, in fine temporis tertii, triplam celeritatem constituet ejus quæ fuerat in fine temporis primi.

Eodem modo ostendetur tempore quarto peragi debere & spatium GH triplum spatii BD , & spatium HK ipsi AB æquale: velocitatemque in K , in fine quarti temporis, fore quadruplam ejus quæ fuerat in B , in fine temporis primi. Atque ita spatia quotlibet deinceps considerata, quæ æqualibus temporibus peracta fuerint, æquali excessu, qui ipsi BD æqualis sit, crescere manifestum est; simulque etiam velocitates per æqualia tempora æqualiter augeri.



PROPOSITIO II.

Spatium peractum certo tempore à gravi, è quiete casum inchoante, dimidium est ejus spatii quod pari tempore transiret motu æquabili, cum velocitate quam acquisivit ultimo casus momento.

Ponantur quæ in propositione præcedenti, ubi quidem AB erat spatium certo tempore, à gravi cadente ex A , peractum. BD vero spatium quod pari tempore transiri intelligebatur celeritate æquabili, quanta acquisita erat in fine primi temporis, seu in fine spatii AB . Dico itaque spatium BD duplum esse ad AB .

Quum enim spatia primis quatuor æqualibus temporibus à cadente transmissa sint AB , BE , EG , GH , quorum inter se certa quædam est proportio: si eorum temporum dupla tempora sumamus, ut nempe pro primo tempore jam accipiantur duo illa quibus spatia AB , BE , peracta fuere; pro secundo vero tempore duo reliqua quibus peracta fuere spatia EG , GK , oportet jam spatia AE , EK , quæ sunt æqualibus temporibus à quiete peracta, inter se esse sicut spatia AB , BE , quæ æqualibus item temporibus à quiete percurrerantur.

Quum igitur sit ut AB ad BE , ita AE ad EK ; & convertendo, ut EB five DA ad AB ita KE ad EA : erit quoque, dividendo, DB ad BA ut excessus KE supra EA ad EA . Quum sit autem, ex ostensis propositione præcedenti, KE æqualis tum duplæ AB , tum quintuplæ BD : EA vero æqualis tum duplæ AB , tum simplici BD ; apparet dictum excessum KE supra EA æquari quadruplæ BD . Sicut igitur DB ad BA ita erit quadrupla DB ad EA : unde E A quadrupla erit ipsius BA : eadem vero EA æquatur, uti diximus, & duplæ AB & simplici BD . ergo BD duplæ AB æqualis erit; quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO III.

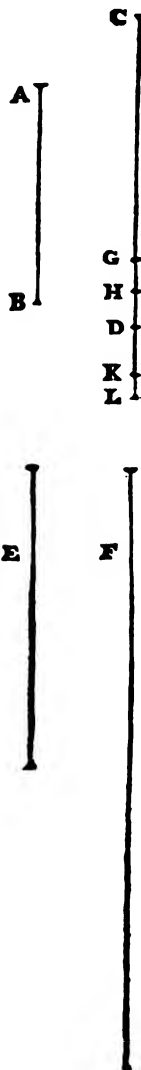
Spatia duo, à gravi cadente quibuscumque temporibus transmissa, quorum utrumque ab initio descensus accipitur, sunt inter se in ratione duplicata eorundem temporum, sive ut temporum quadrata, sive etiam ut quadrata celeritatum in fine cuiusque temporis acquisitarum.

Quum enim ostensum sit propositione antecedenti spatia AB , BE , EG , GK , quotcumque fuerint, æqualibus temporibus à cadente peracta, crescere æquali excessu, qui excessus sit ipsi BD æqualis: Patet nunc, quoniam BD est dupla AB , spatium BE fore triplum AB ; EG quintuplum ejusdem AB ; GK septuplum; aliaque deinceps auctum iri secundum progressionem numerorum imparium ab unitate, 1, 3, 5, 7, 9, &c. cumque quotlibet horum numerorum, sese consequentium, summa faciat quadratum, cujus latus est ipsa adsumptorum numerorum multitudo (velut si tres primi addantur, facient novem, si quatuor sexdecim) sequitur hinc spatia, à gravi cadente transmissa, quorum utrumque à principio casus inchoetur, esse inter se in ratione duplicata temporum quibus casus duravit, si nempe tempora commensurabilia sumantur.

Facile autem & ad tempora incommensurabilia demonstratio extendetur. Sint enim tempora hujusmodi, quorum inter se ratio ea quæ linearum AB , CD . spatiaque temporibus his transmissa sint E , & F , utraque nimirum ab initio descensus adsumpta. Dico esse, ut quadratum AB ad quadratum CD , ita spatium E ad F .

Si enim negetur; habeat primo, si potest, spatium E ad F majorem rationem quam quadratum AB ad quadratum CD , nempe eam quam quadratum AB ad quadratum CG , sumpta CG minore quam CD & à CD auferatur pars DH , minor quam DG excessus CD supra CG , atque ita ut reliqua HC commensurabilis sit ipsi AB ; hoc enim fieri posse constat. Erit ergo CH major quam CG . Atqui ut quadratum temporis AB ad quadratum temporis CH , ita spatium E , quod tempore AB peractum est ad spatium peractum tempore CH , per superiùs ostensa. Hoc vero spatio majus est illud quod tempore CD percurritur, nempe spatium F . ergo spatii E ad spatium F minor est ratio quam quadrati AB ad quadratum CH . Sicut autem spatium E ad F , ita ponebatur esse quadratum AB ad quadratum CG ; ergo minor quoque erit ra-

D

DE DESCENSU
GRAVIUM.

tio quadrati AB ad quadratum CG , quam quadrati AB ad quadratum CH , ac proinde quadratum CG majus quadratum CH ; quod est absurdum, quum CH major dicta sit quam CG . Non habet igitur spatium E ad F majorem rationem quam quadratum AB ad quadratum CD .

Habeat jam, si potest, minorem; sitque ratio spatii E ad F eadem quæ quadrati AB ad quadratum CL , sumptâ CL majore quam CD , & à CL auferatur LK minor excessu LD , quo CD superatur à CL ; atque ita ut reliqua KC sit commensurabilis AB . Quia ergo ut quadratum temporis AB ad quadratum temporis CK , ita est spatium E , peractum tempore AB , ad spatium peractum tempore CK . Hoc vero spatio minus est spatium peractum tempore CD , nempe spatium F . erit proinde spatii E ad F major ratio quam quadrati AB ad quadratum CK . Sicut autem spatium E ad F , ita ponebatur esse quadratum AB ad quadratum CL . Ergo major erit ratio quadrati AB ad quadratum CL quam ejusdem quadrati AB ad quadratum CK , ideoque quadratum CL minus erit quam qu. CK . quod est absurdum, quum CL major sit quam CK . Ergo neque minorem rationem habet spatium E ad F quam quadratum AB ad quadratum CD . quare necesse est ut eandem habeat. Porro cum celeritates in fine

temporum AB , CD acquisitæ sint inter se sicut ipsamet tempora; apparet rationem spatorum E ad F eandem quoque esse quæ quadratorum temporum AB , CD , quibus transmissa sunt. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO IV.

S*I grave celeritate ea quam in fine descensus acquisivit sursum tendere cæperit, fiet ut paribus temporis partibus, spatia quæ prius sursum, eadem deorsum transeat, adeoque ad eandem unde descenderat altitudinem ascendat. Item ut aequalibus temporis partibus equalia amittat celeritatis momenta.*

Sunto enim ut in propositione 2, spatia quotlibet, æqualibus

temporis partibus cadendo è quiete peracta, quorum primum A B; secundum compositum ex B D, quod celeritate æquabili acquisita per A B transeundum erat, & ex D E ipsi A B æquali; tertium compositum, ex E F, duplo ipsius B D, & ex F G, eidem A B æquali; quartum compositum ex G H, triplo ipsius B D, & ex H K ipsi itidem A B æquali, atque eadem ratione porro crescentia, si plura fuerint. Dico totidem æqualibus temporibus eadem spatia K G, G E, E B, B A, singula singulis peragenda esse à gravi fursum tendente, atque incipiente cum celeritate in fine descensus K acquisita.

A
B
D
E
F
G
H
K

Brevitatis autem gratia celeritas quæque designetur deinceps longitudine spatii quod grave motu æquabili, cum celeritate illa, atque temporis parte una, quales in descensu consideravimus, transmissurum esset.

Itaque ex ostensis dicta propositione, cum in K grave pervenerit, habet celeritatem G H auctam celeritate B D, hoc est celeritatem K F, quia K F æquatur ipsis H G, B D, sunt enim partes singulæ H K, F G, æquales ipsi A B, ac proinde utraque simul ipsi B D, quam esse duplam A B ostendimus propositione 2. Itaque celeritatem in fine descensus K acquisitam fursum convertendo, si grave æquabili motu ferretur, conficeret una temporis parte spatium K F. Atqui, gravitatis actione accedente, diminueretur ascensus K F spatio F G ipsi A B æquali, ut patet ex dictis ad hypothesein initio sumptam. Ergo parte prima temporis ascendet grave tantum per K G, quo eodem spatio parte temporis novissima descenderat. Simul vero & celeritati tantum decessisse necesse est, quantum acquiritur temporis parte una deorsum cadendo, hoc est celeritatem B D. Itaque grave, ubi ad G ascenderit, habet celeritatem reliquam H G, cum initio ascensus habuerit celeritatem H G una cum celeritate B D. Est autem ipsi H G æqualis G D; quum æquetur ipsi F E una cum D B, hoc est una cum dupla A B, hoc est una cum duabus F G & E D; Ergo si ex G, cum celeritate æquabili, quantam illic habet, fursum pergeret, conficeret una parte temporis spatium G D. Accedente autem gravitatis actione, diminueretur ascensus iste spatio D E, ipsi A B æquali. Ergo, hac secunda parte temporis, ascendet per spatium G E, quod simili temporis parte etiam cadendo transierat. Simul autem celeritati tantum decessisse denuo debet quantum temporis parte una ex casu acquiritur, nempe celeritas B D. Itaque ubi usque ad

D ij

DE DESCENSU
GRAVIUM.

E ascenderit, habet duntaxat celeritatem FE , quæ nimirum relinquitur quum à celeritate GD aufertur celeritas BD . Nam BD , ut jam diximus, æqualis est duabus DE , FG .

Est autem ipsi FE æqualis EA , quum FE æquetur ipsi BD bis sumptæ, hoc est ipsi BD una cum dupla AB , hoc est una cum duabus AB , DE . Ergo si ex E cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, confecturum esset una temporis parte spatium EA . Sed accedente actione gravitatis, diminuetur ascensus iste ipso spatio AB . Proinde hac parte temporis per spatium E B tantum ascendet, quod simili parte temporis descendendo quoque transferat. Hic vero rursus celeritati tantum decessisse necesse est quantum una temporis parte cadendo deorsum acquiritur, hoc est celeritatem BD . Itaque grave, ubi usque ad B ascenderit, habet celeritatem ipsam BD reliquam, cum in E habuerit celeritatem FE ipsius BD duplam. Si ergo ex B cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, confecturum esset parte una temporis spatium æquale ipsi DB , hoc est duplum AB . Sed accedente gravitatis actione, diminuitur ascensus iste spatio quod ipsi AB æquale sit. Igitur hac parte temporis ascendet tantummodo per spatium BA , quod etiam primo descensus tempore transferat. Atque in fine quidem extremi temporis hujus necessario grave in A puncto reperietur. Sed dicetur forsitan altius ascendisse quam ad A , atque inde eo relapsum esse. At hoc absurdum esset, cum non possit, motu à gravitate profecto, altius quam unde decidit ascendere. Porro quum celeritati quam in B habebat rursus decesserit celeritas BD , patet jam gravi in A constituto nullam celeritatem superesse, ac proinde non altius excursurum. Itaque ostensum est ad eandem unde decidit altitudinem pervenisse, & singula spatia, quæ æqualibus descensus temporibus transmisserat, eadem totidem ascensus temporibus remensum esse: sed & æqualibus temporibus æqualia ipsi decessisse celeritatis momenta apparuit. Ergo constat propositum.

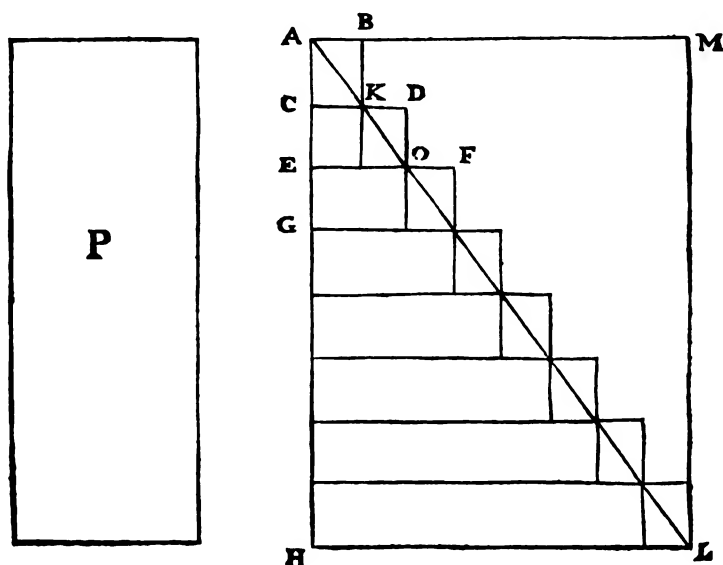
Quia vero in demonstratione propositionis secundæ, ex qua pendet præcedens, adsumptum fuit certam quandam esse proportionem spatiorum quæ continuis æqualibus temporibus à gravi cadente transeuntur, quæque eadem sit, quæcunque æqualia tempora accipiantur; quod quidem & ex rei natura ita se habere necesse est, & si negetur, fatendum frustra proportionem istorum spatiorum investigari. Tamen, quia propositum etiam absque hoc demonstrari potest, Galilei methodum sequendo,

operæ pretium erit demonstrationem, ab illo minus perfecte traditam, hic accuratius conscribere. itaque rursus hic demonstrabimus, DE DESCENSO GRAVIUM.

PROPOSITIO V.

Spatium peractum certo tempore, à gravi è quiete casum inchoante, dimidium esse ejus spatii quod pari tempore transiret motu aquabili, cum celeritate quam acquisivit ultimo casus momento.

Sit tempus descensus totius AH , quo tempore mobile peregerit spatium quoddam cujus quantitas designetur plano P . ducta-



que HL perpendiculari ad AH , longitudinis cujuslibet, referat illa celeritatem in fine casus acquisitam. Deinde completo rectangulo AHL , intelligatur eo notari quantitas spatii quod percurreretur tempore AH , cum celeritate HL . Ostendendum est igitur planum P dimidium esse rectanguli ML , hoc est, ducta diagonali AL , æquale triangulo AHL .

Si planum P non est æquale triangulo AHL , ergo aut minus eo erit, aut majus. Sit primo, si fieri potest, planum P minus triangulo AHL . dividatur autem AH in tot partes æquales AC , CE , EG &c. ut, circumscriptâ triangulo AHL figurâ è rectangulis quorum altitudo singulis divisionum ipsius AH partibus æquetur, ut sunt rectangula BC , DE , FG , alterâque eidem triangulo inscriptâ, ex rectangulis ejusdem altitudinis, ut sunt KE , OG &c. ut, inquam, excessus illius figuræ supra hanc, minor sit excessu

DE DESCENSU
GRAVIUM.

trianguli AHL supra planum P . hoc enim fieri posse perspicuum est, cum totus excessus figuræ circumscriptæ super inscriptam æquetur rectangulo infimo, basin habenti HL . Erit itaque omnino excessus ipsius trianguli AHL supra figuram inscriptam minor quam supra planum P , ac proinde figura triangulo inscripta major plano P . Porro autem, quum recta AH tempus totius descensus referat, ejus partes æquales AC , CE , EG , æquales temporis illius partes referent. Cumque celeritates mobilis cadentis crescant eadem proportionem qua tempora descensus *, sitque celeritas in fine totius temporis acquisita HL ; erit ea, quæ in fine primæ partis temporis AC acquireretur, CK ; quia ut AH ad AC , ita HL ad CK . Similiter quæ in fine partis temporis secundæ CE acquiritur, erit EO , atque ita deinceps. Patet autem, tempore primo AC , spatium aliquod à mobili transmissum esse, quod majus sit nihilo; tempore vero secundo CE transmissum esse spatium quod majus sit quam KE , quia spatium KE transmissum fuisset tempore CE , motu æquabili, cum celeritate CK . habent enim spatia, motu æquabili transacta, rationem compositam ex ratione temporum, & ratione velocitatum, ideoque cum tempore AH , celeritate æquabili HL percurri posuerimus spatium MH , sequitur tempore CE , cum celeritate CK , percurri spatium KE , quum ratio rectanguli MH ad rectangulum KE componatur ex rationibus AH ad CE , & HL ad EO .

Quum ergo, ut dixi, spatium KE sit illud quod transmitteretur tempore CE , cum celeritate æquabili CK , mobile autem feratur tempore CE motu accelerato, qui jam principio hujus temporis habet celeritatem CK ; manifestum est isto accelerato motu, tempore CE , majus spatium quam KE confecturum. Eadem ratione, tempore tertio EG , majus spatium conficiet quam OG , quia nempe hoc confecturum esset tempore eodem EG , cum celeritate æquabili EO . Atque ita deinceps, singulis temporis AH partibus, à mobili majora spatia quam sunt rectangula figuræ inscriptæ, ipsis partibus adjacentia, peragentur. Quare totum spatium motu accelerato peractum majus erit ipsa figura inscripta. Spatium vero illud æquale positum fuit plano P . Itaque figura inscripta minor erit spatio P . quod est absurdum; eodem enim spatio major ostensa fuit. Non est igitur planum P minus triangulo AHL . At neque majus esse ostenderetur.

Sic enim, si potest; & dividatur AH in partes æquales, atque ad earum altitudinem, inscripta circumscriptaque rursus,

ut ante, sit triangulo AHL figura ex rectangulis, ita ut altera alteram excedat minori excessu quam quo planum P superat triangulum AHL , erit igitur necessario figura circumscripta minor plano P . Constat jam, prima temporis parte AC , minus spatium à mobili transmitti quam sit BC , quia hoc percurreretur eodem tempore AC cum celeritate æquabili CK , quam demum in fine temporis AC mobile adeptum est. Similiter secunda parte temporis CE , minus spatium motu accelerato transmittetur quam sit DE , quia hoc percurreretur eodem tempore CE , cum celeritate æquabili EO , quam demum in fine temporis CE mobile assequitur. Atque ita deinceps, singulis partibus temporis AH , minora spatia à mobili trajicientur quam sunt rectangula figuræ circumscriptæ, ipsis partibus adjacentia. Quare totum spatium motu accelerato peractum, minus erit ipsa figura circumscripta. Spatium vero illud æquale positum fuit plano P ; ergo planum P minus quoque erit figura circumscripta. quod est absurdum, cum figura hæc plano P minor ostensa fuerit. Ergo planum P non majus est triangulo AHL , sed nec minus esse jam ostensum fuit. Ergo æquale sit necesse est; quod erat demonstrandum.

Et hæc quidem omnia quæ hæctenus demonstrata sunt, gravibus per plana inclinata descendentibus atque ascendentibus æque ac perpendiculariter motis convenire sciendum est: cum, quæ de effectû gravitatis posita fuerunt, eadem ratione utrobique sint admittenda.

Hinc vero non difficile jam erit demonstrare propositionem sequentem quam concedi sibi, ut quodammodo per se manifestam, Galileus postulavit. nam demonstratio illa quam postea adferre conatus est, quæque in posteriori operum ejus editione extat, parum firma meo quidem judicio videtur. Est autem propositio hujusmodi.

PROPOSITIO VI.

Celeritates gravium, super diversis planorum inclinationibus descendendo acquisita, æquales sunt, si planorum elevationes fuerint æquales.

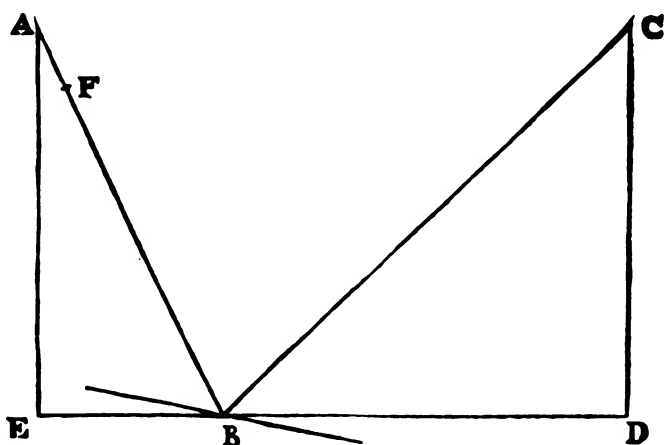
Elevationem plani vocamus altitudinem ejus secundum perpendicularum.

Sunto itaque plana inclinata, quorum sectiones factæ plano ad horizontem erecto, AB , CB ; quorumque elevationes AE , CD

sint æquales; & cadat grave ex A per planum A B, & rursus ex C per planum C B. dico utroque casu eundem gradum velocitatis in puncto B acquisiturum.

Si enim per C B cadens minorem velocitatem acquirere dicatur quam cadens per A B, habeat ergo, per C B cadens, eam duntaxat quam per F B acquireret, posita nimirum F B minore quam A B. Acquiret autem per C B cadens eam velocitatem qua rursus

* Prop. 4. huj. per totam B C possit ascendere.* Ergo & per F B acquireret eam



velocitatem qua possit ascendere per totam B C. Ideoque cadens ex F in B, si continuet porro motum per B C; quod percussu ad superficiem obliquam fieri potest; ascendet usque in C, hoc est, altius quam unde decidit, quod est absurdum.

Eodem modo ostendetur neque per planum A B decedenti minorem velocitatem acquiri quam per C B. Ergo per utraque plana eadem velocitas acquiritur, quod erat demonstrandum.

Quod si vero, pro plano alterutro, sumatur perpendiculum ipsum planorum elevationi æquale, per quod decidere mobile ponatur, sic quoque eandem quam per plana inclinata velocitatem ei acquiri constat; eadem namque est demonstratio.

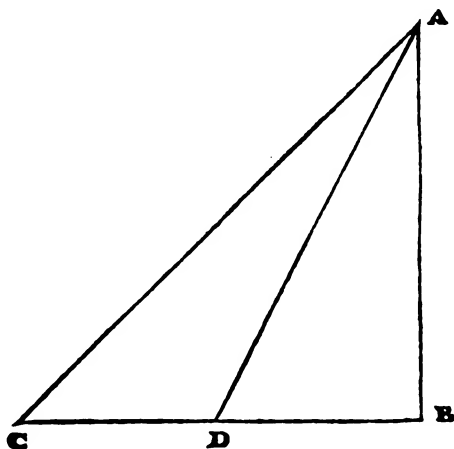
Porro hinc jam recte quoque procedet demonstratio alterius theorematism Galileani, cui reliqua omnia, quæ de descensu super planis inclinatis tradidit, superstruuntur. Nempe

PROPOSITIO VII.

T Empora descensuum super planis diversimode inclinatiss, sed quorum eadem est elevatio, esse inter se ut planorum longitudines.

Sint plana inclinata A C, A D quorum eadem elevatio A B. dico
tempus

tempus descensus per planum AC ad tempus descensus per AD ^{DE DESCENSU GRAVIUM.} esse ut longitudo AC ad AD . Est enim tempus per AC æquale tempori motus æquabilis per eandem AC , cum celeritate dimidia ejus quæ acquiritur casu per AC *. Similiter tempus per AD est ^{* Prop. 2. huj.} æquale tempori motus æquabilis per ipsam AD , cum dimidia ce-



leritate ejus quæ acquiritur casu per AD . Est autem hæc dimidia celeritas illi dimidiæ celeritati æqualis*, ideoque dictum tempus ^{*Prop. præced.} motus æquabilis per AC , ad tempus motus æquabilis per AD , erit ut AC ad AD . Ergo & tempora singulis istis æqualia, nimirum tempus descensus per AC , ad tempus descensus per AD , eandem rationem habebunt, nempe quam AC ad AD . quod erat demonstrandum.

Eodem modo ostenderetur & tempus descensus per AC , ad tempus casus per AB perpendicularem, esse ut AC ad AB longitudine.

PROPOSITIO VIII.

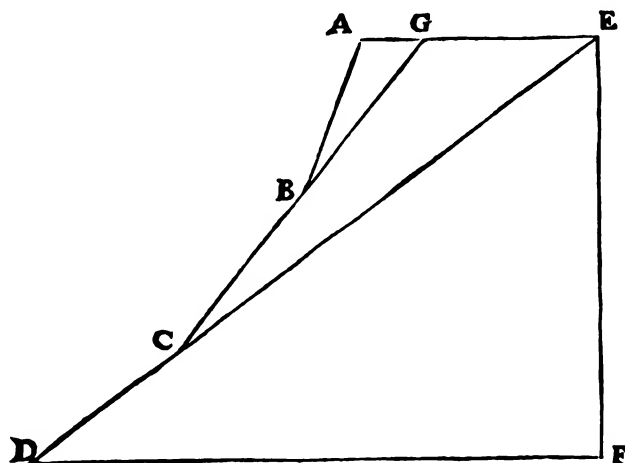
S*I ex altitudine eadem descendat mobile continuato motu per quotlibet ac qualibet plana contigua, utcunque inclinata; semper eandem in fine velocitatem acquirat, quæ nimirum æqualis erit ei quam acquireret cadendo perpendiculariter ex pari altitudine.*

Sint plana contigua AB , BC , CD , quorum terminus A , supra horizontalem lineam DF per infimum terminum D ductam, altitudinem habeat quanta est perpendicularis EF . descendatque mobile per plana illa ab A usque in D . Dico in D eam velocitatem habiturum quam, ex E cadens, haberet in F .

Producta enim CB occurrat rectæ AE in G . Itemque DC producta

DE DESCENSU
GRAVIUM.

occurrat eidem $A E$ in E . Quoniam itaque per $A B$ descendens eandem acquirit velocitatem in termino B , atque descendens per $G B^*$; manifestum est, cum flexus ad B nihil obstare motui ponatur, tantam velocitatem habiturum ubi in C pervenerit, quantam si per $G C$ planum descendisset; hoc est, quantam ha-



beret ex descensu per $E C$. Quare & reliquum planum $C D$ eodem modo transibit ac si per $E C$ advenisset, ac proinde in D denique parem velocitatem habebit, ac si descendisset per planum $E D$, hoc est, eandem quam ex casu perpendiculari per $E F$. quod erat demonstrandum.

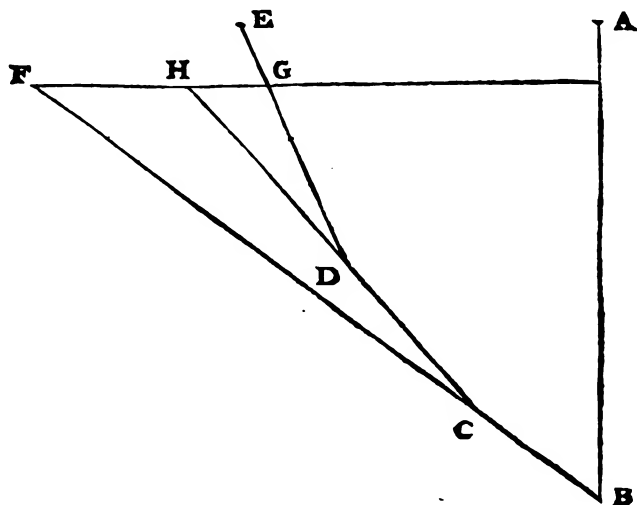
Hinc liquet etiam per circuli circumferentiam, vel per curvam quamlibet lineam descendente mobili (nam curvas tanquam ex infinitis rectis compositæ essent hic considerare licet) semper eandem illi velocitatem acquiri si ab æquali altitudine descenderit: tantamque eam esse velocitatem, quantam casu perpendiculari ex eadem altitudine adipisceretur.

PROPOSITIO IX.

S*I grave, à descensu, sursum convertat motum suum, ascendet ad eandem unde venit altitudinem, per quas-cunque planas superficies contiguas, & quomodocunque inclinatas, incesse-rit.*

Cadat grave ex altitudine $A B$, & ex puncto B inclinata sint sursum plana $B C$, $C D$, $D E$, quorum extremitas E sit eadem altitudine cum puncto A . Dico si mobile, post casum per $A B$, convertat motum ut pergat moveri per dicta plana inclinata, perventurum usque in E .

DE DESCENSU
GRAVIVM.



Est autem eadem prorsus demonstratio quotcumque plana fuerint per quæ mobile ascendat. Vnde & si infinita fuerit planorum multitudo, hoc est, si superficies aliqua curva ponatur, per hanc quoque ad eam ex qua venit altitudinem mobile assurgit.

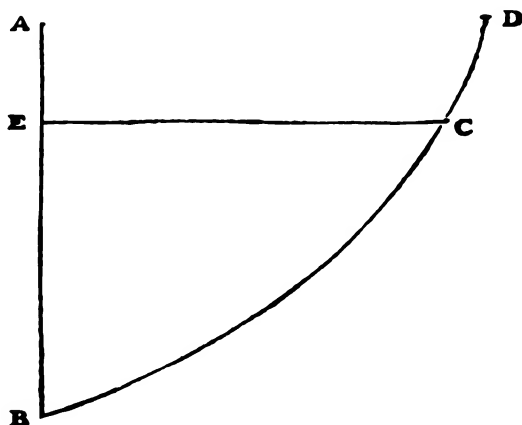
PROPOSITIO X.

S Immobile cadat perpendiculariter, vel per quamlibet superficiem descendat, ac rursus impetu concepto per quamlibet aliam feratur sursum, habebit ascendendo ac descendendo in punctis aque altis eandem semper velocitatem.

Ut si mobile ex altitudine $A B$ decidens, motum deinde continuet per superficiem $B C D$, in qua punctum C sit pari altitudine atque in $A B$ est punctum E . Dico in C eandem velocitatem inesse mobili atque in E fuerat.

E ij

Quum enim in c ea velocitas superfit mobili qua porro ascendat

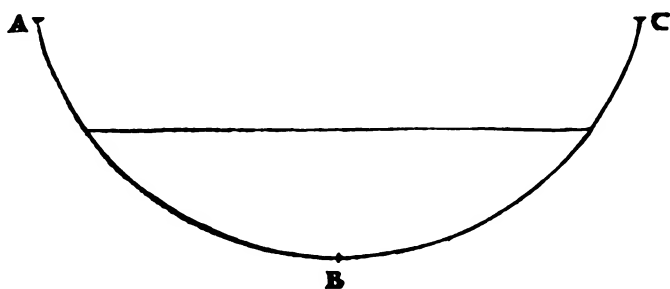


Prop. præced. usque ad D punctum, æque altum ac A: cumque & ex descensu per A B velocitatem eam acquirat qua, converso motu, ascensurum fit per C D*; Patet cum pervenit ad C ascendendo, eandem ipsum habere velocitatem, quam habebat in E descendendo; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.

SI mobile per superficiem aliquam deorsum tendat, ac deinde converso motu sursum per eandem superficiem vel aliam similem similiterque positam feratur, equalibus temporibus per idem spatium descendet atque ascendet.

Velut si per superficiem A B descendat mobile, atque, ubi ad B



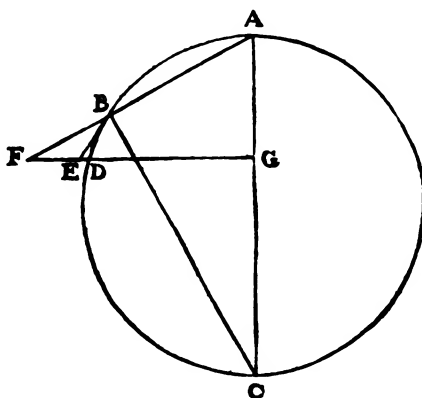
pervenerit, converso motu sursum per eandem A B, vel ei similem & respectu plani horizontalis similiter positam B C, ascendat, constat ex ante demonstratis, perventurum ad eandem ex qua venit altitudinem. Cum autem perpetuo, in punctis quorum eadem altitudo, eandem velocitatem habeat ascendendo ac descendendo*; apparet eandem lineam bis eadem velocitate singulis sui partibus percurri: unde & tempora utriusque motus æqualia esse necesse est; quod erat demonstrandum.

*Prop. præced.

PROPOSITIO XII.

Esto circulus ABC , diametro AC , cui ad angulos rectos sit FG ; huic vero occurrat à termino diametri A educta AF extra circulum, quæ quidem necessario secabit circumferentiam, puta in B . Dico arcum BD , lineis GF , AF interceptum, minorem esse recta DF .

Iungatur enim BC , & ducatur ex B puncto tangens circumfe-



rentiam recta BE , quæ necessario occurret rectæ FG inter F & D . Est igitur angulus BAC in circulo æqualis angulo $EB C^*$. quare & angulus FBE , qui una cum $EB C$ constituit angulum rectum FBC , erit æqualis BCA . Quia autem similia sunt triacula ABC , AGF , erit & angulus F æqualis angulo ACB . Ergo idem angulus F æqualis angulo FBE . Itaque isosceles est triangulus FEB , habens crura æqualia FE , EB . Addita ergo utrique eorum recta ED , fiet FD , æqualis duabus BE , ED . Hasce vero duas maiores esse constat arcu BD , iisdem terminis intercepto, & in eandem partem cavo. Ergo & FD eodem arcu BD major erit: quare constat propositum.

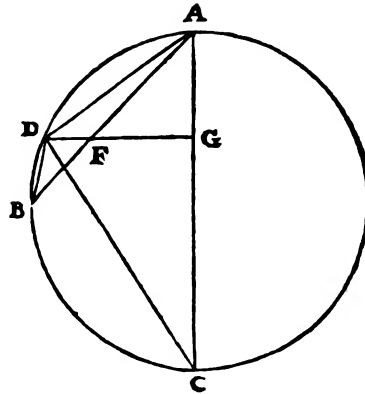
PROPOSITIO XIII.

Iisdem positis, si recta AB occurrat ipsi DG intra circulum; Dico arcum BD , rectis GD , AB interceptum, maiorem esse recta DF .

Iungatur enim DC & ducatur arcui DB subtensa DB . Quoniam ergo angulus ABD æqualis ACD , hoc est, angulo ADG ; angulus autem DFB major angulo ADF , sive ADG ; erit

E iij

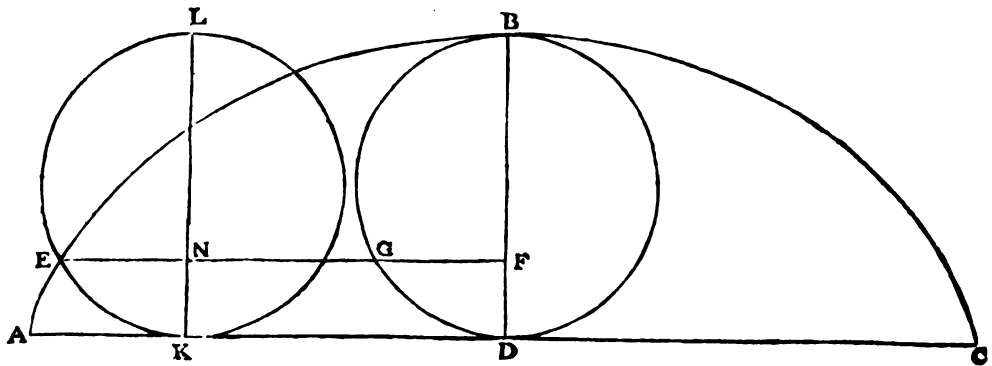
idem DFB etiam major DBF . Ergo in triangulo DFB latus DB



majus latere DF ; unde multo magis arcus DB superabit eandem DF . Quare constat propositum.

PROPOSITIO XIV.

Sit cyclois ABC cujus basis AC axis BD . Quomodo autem generetur ex definitione & descriptione mechanica superius traditis satis manifestum arbitror. Et circa axem BD , circulus descriptus sit BGD , & à quolibet puncto E in cycloide sumpto agatur EF basi AC parallela, quæ occurrat axi BD in F , secetque circumferentiam BGD in G , Dico rectam GE arcui GB æqualem esse.



Describatur enim per E punctum circulus LEK ipsi BGD æqualis, quique tangat basin cycloidis in K , & ducatur diameter KL . Est igitur recta AK arcui EK æqualis; sed tota AD æqualis semicircumferentiæ $KE L$; ergo KD æqualis arcui $E L$ sive GB . Est autem KD sive NF æqualis EG , quoniam EN æqualis GF , & communis utrique NG . Ergo constat & GE æqualem esse arcui GB .

PROPOSITIO XV.

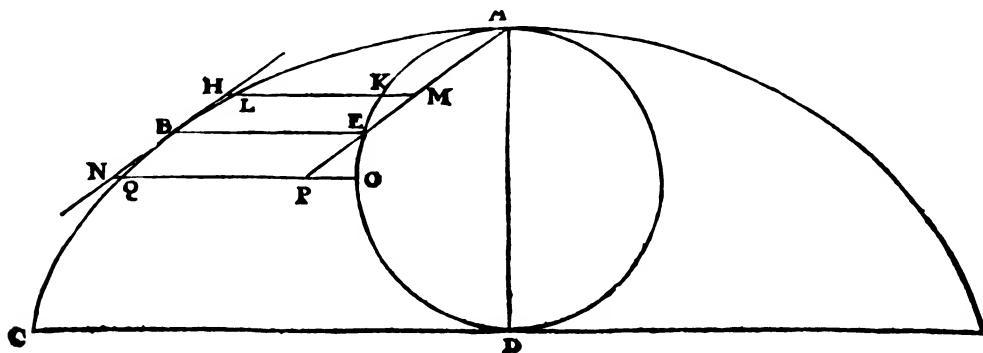
 DE DESCENSU
GRAVIUM.

D Ato in Cycloide puncto, rectam per illud ducere quæ Cycloidem tangat.

Sit cyclois ABC , & punctum in ea datum B , per quod tangentem ducere oporteat.

Circa axem cycloidis AD describatur circulus genitor AED , & ducatur BE parallela basi cycloidis, quæ dicto circulo occurrat in E , & jungatur AE , cui denique parallela per B agatur HN . Dico hanc cycloidem in B contingere.

Sumatur enim in ea punctum quodlibet, à B diversum, ac pri-

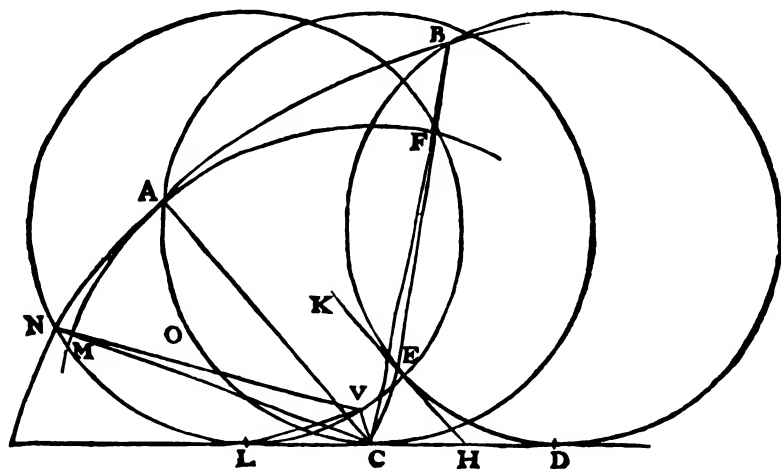


mo versus superiora velut H , & per H ducatur recta basi cycloidis parallela, quæ occurrat cycloidi in L , circulo AED in K , rectæ AE in M . Quia ergo KL est æqualis arcui KA , recta autem KM minor arcui KE , erit recta ML minor arcui AE , hoc est, rectâ EB , sive MH ; unde apparet punctum H esse extra cycloidem.

Deinde in recta HN sumatur punctum N inferius B , & per N agatur, ut ante, basi parallela, quæ occurrat cycloidi in Q , circulo AED in O , rectæ AE productæ in P . Quia ergo OQ , æqualis est arcui OA ; OP autem major arcui OE ; erit PQ minor arcui EA , hoc est, rectâ EB , sive PN . Vnde apparet rursus punctum N esse extra cycloidem. Cum igitur quodlibet punctum præter B , in recta HN sumptum, sit extra cycloidem, constat illam in puncto B cycloidem contingere; quod erat demonstrandum.

Huic demonstrationi an locum suum hic relinquerem dubitavi, quod non multum ei ab similem à clarissimo VVrennio editam inveniam in libro VVallisij de Cycloide. Potest autem & universali constructione propositum absolvi, quæ non cycloidi tantum sed & aliis curvis, ex cujuslibet figuræ circumvolutione genitis, conveniat; dummodo sit figura in eandem partem cava, & ex iis quæ geometricæ vocantur.

DE DESCENSA
GRAVIUM.



DE DESCENSA
GRAVIUM.

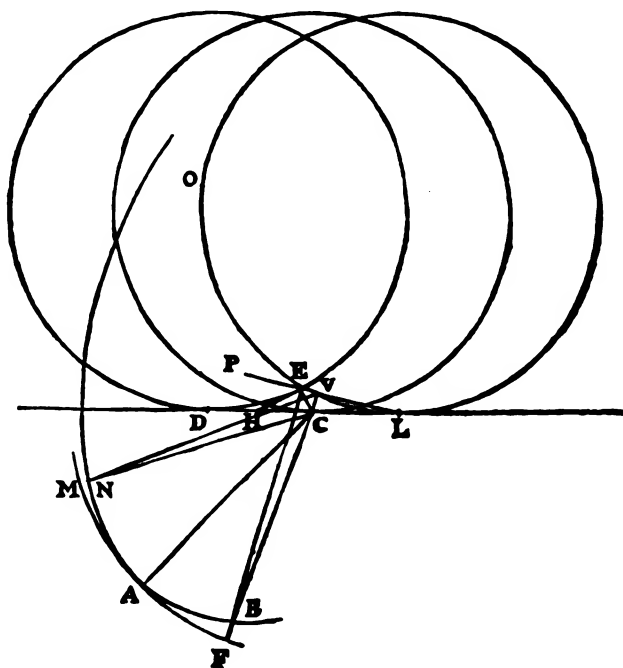
DE DESCENSA
GRAVIUM.

tum. Ergo $C B$ etiam major quam $C A$, hoc est, quam $C F$. unde DE DESCENSU GRAVIUM. constat punctum B esse extra circumferentiam $M A F$.

Sit rursus punctum N in curva sumptum inter regulam $L D$ & punctum A . Cumque punctum describens esset in N , ponatur situs figuræ fuisse in $V L$, punctumque contactus L , punctum verò quod tangebatur prius regulam in C , sit jam sublatum in V : & jungantur $C N$, $N V$, $V C$, $V L$. Erit ergo $V N$ æqualis $C A$; imo erit ipsa $C A$ translata in $V N$. Iam quia recta $L C$ æquatur curvæ $L V$, ac proinde major est recta $L V$, erit in triangulo $C L V$ angulus $L V C$ major quam $L C V$. Quare addito insuper angulo $L V N$ ad $L V C$, fiet totus $N V C$ major utique quam $L C V$, ac proinde omnino major angulo $N C V$, qui pars est $L C V$. Ergo in triangulo $C V N$ latus $C N$ majus erit latere $V N$, cui æquatur $C A$, ideoque $C N$ major quoque quam $C A$, hoc est quam $C M$. Vnde apparet punctum N cadere extra circumferentiam $M A F$, qui proinde tanget curvam in puncto A . quod erat demonstrandum.

Est autem eadem quoque tum constructio tum demonstratio, si curva genita sit à puncto describente, vel intra vel extra ambitum figuræ circumvolutæ sumpto. Nisi quod, hoc posteriori casu, pars quædam curvæ infra regulam descendit, unde nonnulla in demonstratione oritur diversitas.

Sit enim punctum A , per quod tangens ducenda est, datum in



parte curvæ $N A B$, quæ infra regulam $C L$ descendit, descripta nimirum à puncto N extra figuram revolutam sumpto, sed certam
F

positionem in eodem ipsius plano habente. Invento igitur puncto C , ubi figura revoluta tangit regulam CD quum punctum describens esset in A , ducatur recta CA . Dico hanc curvæ NAB occurrere ad rectos angulos, sive circumferentiam radio CA centro C descriptam tangere curvam NAB in puncto A . Ostendetur autem exterius ipsam contingere, cum in curvæ parte supra regulam CD posita interius contingat.

Positis enim & descriptis iisdem omnibus quæ prius, ostenditur rursus angulus ECN major quam CEH . atqui ad ECN addito NCB fit angulus ECB ; & à CEH auferendo NEB , qui æqualis est DCN , fit angulus CEB . Ergo ECB major omnino quam CEB . unde in triangulo ECB latus EB majus quam CB . sed ipsi EB æqualis est CA , sive CF . Ergo & CF major quam CB : ideoque punctum circumferentiæ F est ultra curvam NAB à centro remotum.

Item rursus ostenditur angulus LVC major LCV . Quare CVN , qui cum LVC duos rectos æquat, minor erit quam VCN . Atqui addendo ad VCN angulam DCN , fit VCN ; & auferendo ab CVN angulum PVN , fit CVN . Ergo angulus VCN omnino major quam CVN . In triangulo itaque CVN , latus VN majus erit quam CN . Est autem ipsi VN æqualis CA sive CM . Ergo & CM major quam CN , ideoque punctum circumferentiæ M erit ultra curvam NAB à centro C remotum. Itaque constat circumferentiam MAF tangere curvam in puncto A . quod erat demonstrandum.

Quod si punctum curvæ per quod tangens ducenda est, sit illud ipsum ubi regula curvam secat, erit tangens quæsitæ semper regulæ perpendicularis; ut facile esset ostendere.

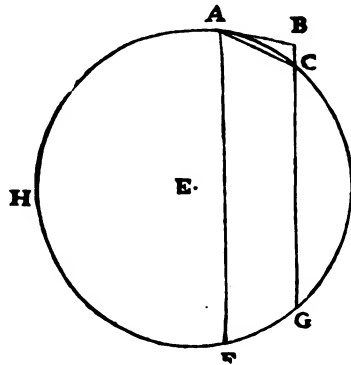
PROPOSITIO XVI.

S*I circuli circumferentiam, cujus centrum E , secant rectæ dua parallela AF, BG , quarum utraque ad eandem partem centri transeat, vel altera AF per centrum ipsum: & à puncto A , quo centro propior circumferentiam secat, ducatur recta ipsam contingens: dico partem hujus AB , à parallela utraque interceptam, minorem esse arcu AC , ab utraque eadem parallela intercepto.*

Ducatur enim arcui AC subtensa recta AC . Quia ergo angulus BAF est æqualis ei quem capit portio circuli AHF , quæ vel major est semicirculo vel semicirculus, erit proinde angulus BAF ,

vel minor recto vel rectus ; ideoque angulus $A B C$ vel major re-
cto vel rectus. Quare in triangulo $A B C$ latus $A C$, angulo B sub-

DE MOTU IN
CYCLOIDA.

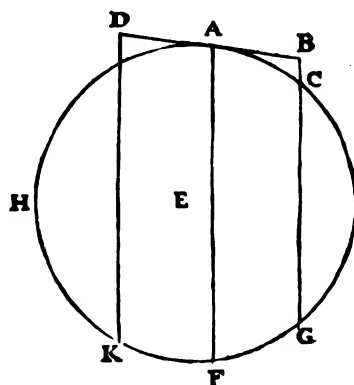


tenfum, majus erit latere $A B$. sed idem latus $A C$ minus est arcu
 $A C$. Ergo omnino & $A B$ arcu $A C$ minor erit.

PROPOSITIO XVII.

Idem positis, si tertia recta prioribus parallela $D K$, cir-
culum secuerit, qua ab ea qua centro propior est $A F$, tan-
tundem distet quantum hac à reliqua $B G$: dico partem tan-
gentis in A , à parallela ultimo adjecta, & media interceptam,
nempe $A D$, arcu $A C$ à primis duabus parallelis intercepto mi-
norem esse.

Hoc enim patet quum $A D$ ipsi $A B$ æqualis sit, quam antea
ostendimus arcu $A C$ minorem esse.



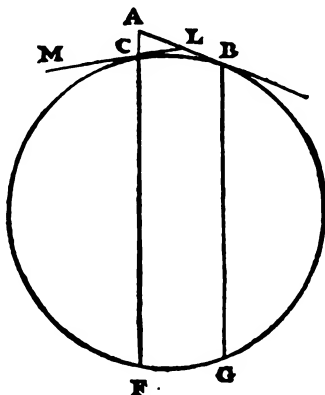
PROPOSITIO XVIII.

Si circulum, cujus centrum E , dua recta parallela secue-
rint $A F$, $B G$; & à puncto B , ubi qua à centro remotior
est, vel tantundem atque altera distat, circumferentia oc-

F ij

currit, ducatur recta circumferentiam tangens: erit pars hujus BA, à parallelis intercepta, major arcu ab iisdem parallelis intercepto BC.

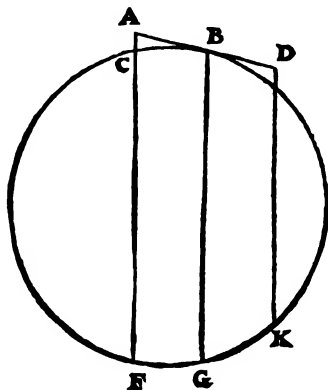
Ducatur enim in puncto C, recta MCL circumferentiam tangens, quæ occurrat tangenti BA in L. In triangulo igitur ACL,



angulus C æqualis est angulo MCF, hoc est, ei quem capit portio circuli CBF. angulus autem A æquatur angulo quem capit portio circuli BCG, quæ portio quum sit major vel æqualis portioni CBF, quippe quum BG vel ulterius distet à centro quam CF, vel tantundem: erit proinde trianguli ACL angulus A minor vel æqualis angulo C: & consequenter latus CL vel minus vel æquale lateri AL. Atqui CL una cum LB majores sunt arcu CB. Ergo & AL una cum LB, hoc est, tangens AB, eodem arcu CB major erit. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

I *Isdem positis, si tertia recta prioribus parallela DK circumlum secet, qua tantundem distet ab ea qua remotior est à*



centro quantum hac à reliqua AF: Erit pars tangentis in B,

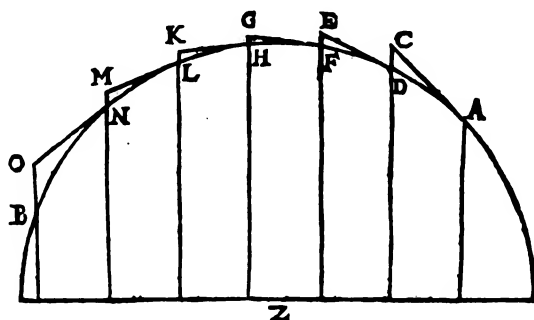
à *parallela media*, & ultimo addita DK , intercepta, *nimirum* BD , major arcu BC .

DE MOTU IN
CYCLOIDE.

Hoc enim manifestum est cum BD fiat ipsi BA æqualis, quam ostendimus arcu BC majorem esse.

PROPOSITIO XX.

SI arcus circuli, semicircumferentia minor, AB , in partes quotlibet secetur lineis rectis parallelis, quæ & inter se, & cum rectis sibi parallelis per terminos arcus ductis, æqualia intervalla constituent, quales sunt CD, EF, GH, KL &c. ducanturque ad terminum arcus alterutrum A , & ad reliqua omnia sectionum puncta rectæ circumferentiam tangentes, omnes in eandem partem, & ut unaquaque occurrat proxima dictarum parallelarum, cujusmodi sunt tangentes AC, DE, FG, HK &c. Dico has tangentes, dempta prima AC , simul sumptas, minores esse arcu proposito AB . Easdem vero omnes, non ommissa AC , majores esse arcu AB diminuto parte extrema NB , hoc est, majores arcu AN .



Ponamus enim primo parallelarum aliquas transire ab utraque parte centri Z , & sit GH , earum quæ sunt à parte B , centro proxima, vel per ipsum centrum transeat. Itaque tangentes omnes inter GH & BO comprehensæ, ut HK, LM, NO , singulæ suis arcubus minores sunt *. Porro autem & tangens GF , arcu se-

*Prop. 16. huj.

quente FD minor est *, & similiter tangens ED arcu DA . Itaque tangentes omnes inter BO & CD interjectæ, minores sunt arcubus BH & FA , ac proinde omnino minores arcubus BH, HA , sive arcu BA , quod erat primo ostendendum.

*Prop. 17. huj.

Porro jam demonstrabimus tangentes omnes inter BO & A majores esse arcu AN . Enimvero parallela GH , vel propius centrum Z transit quam parallela EF , quam pono proximam esse

earum quæ à parte A transeunt, vel erit remotior, vel æque distabit.

Quod si EF longius à centro vel æque remota est ac GH, erit tangens FG major arcu suo FH, & reliquæ tangentes versus A, nimirum ED, CA majores singulæ arcubus suis*; adeo ut omnes simul GF, ED, CA majores sint arcu HA. sed & arcu HL major erit tangens LM*, & arcu LN tangens NO; itaque tangentes omnes, præter HK, majores simul erunt arcu AN; multoque magis, accedente ipsa HK, tangentes omnes inter A & B comprehensæ arcu eodem AN majores erunt.

Si vero GH à centro longius distat quam EF, erit tangens KH major arcu HF*, & tangens ML ut ante major arcu LH, & tangens ON major arcu NL, & omnes proinde tangentes ON, ML, KH majores arcu NF. Sed & tangens ED major est arcu suo FD*, & tangens CA major similiter arcu suo DA. Itaque tangentes omnes inter BO & A, præter GF, majores erunt arcu NA; multoque magis tangentes eadem, accedente GF, hoc est, omnes quæ inter BO & A interjiciuntur, eodem arcu NA majores erunt.

Ex his vero etiam demonstratio manifesta est in casibus aliis, qualiscunque semicircumferentiæ arcus accipiatur, quippe cum vel eadem sit ubique, vel pars tantum præcedentis demonstrationis.

PROPOSITIO XXI.

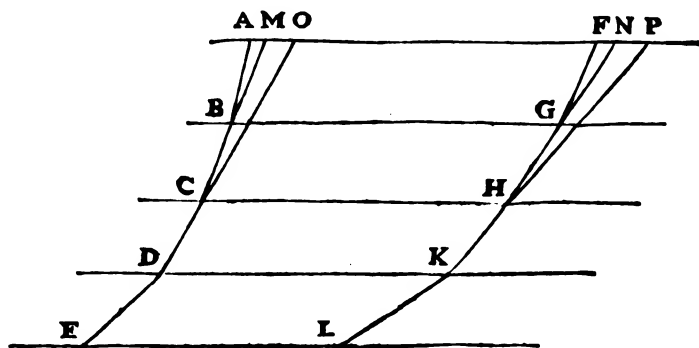
Si mobile descendat continuato motu per qualibet plana inclinata contigua, ac rursus ex pari altitudine descendat per plana totidem contigua, ita comparata ut singula altitudine respondeant singulis priorum planorum, sed majori quam illa sint inclinatione. Dico tempus descensus per minus inclinata, brevius esse tempore descensus per magis inclinata.

Sint series duæ planorum inter easdem parallelas horizontales comprehensæ ABCDE, FGHIKL, atque ita ut bina quæque sibi correspondentia plana utriusque seriei iisdem parallelis horizontalibus includantur; unumquodque vero seriei FGHIKL magis inclinatum sit ad horizontem quam planum sibi altitudine respondens seriei ABCDE. Dico breviori tempore absolvi descensum per ABCDE, quam per FGHIKL.

Nam primo quidem tempus descensus per $A B$, brevius esse constat tempore descensus per $F G$, quum sit eadem ratio horum temporum quæ rectarum $A B$ ad $F G$ *, sitque $A B$ minor quam $F G$, propter minorem inclinationem. Producantur jam sursum rectæ $C B$, $H G$, occurrantque horizontali $A F$ in M & N . Itaque tempus per $B C$ post $A B$, æquale est tempori per eandem $B C$ post $M B$,

DE MOTU IN
CYCLOIDE.

* Prop. 7. huj.



cum in puncto B eadem celeritas contingat, sive per $A B$, sive per $M B$ descendentem*. similiterque tempus per $G H$ post $F G$, æquale erit tempori per eandem $G H$ post $N G$. Est autem tempus per $B C$ post $M B$ ad tempus per $G H$ post $N G$, ut $B C$ ad $G H$ longitudine, sive ut $C M$ ad $H N$, cum hanc rationem habeant & tempora per totas $M C$, $N H$, & per partes $M B$, $N G$ *, ideoque etiam tempora reliqua. Estque $B C$, minor quam $G H$ propter minorem inclinationem. Patet igitur tempus per $B C$ post $M B$ sive post $A B$, brevius esse tempore per $G H$ post $N G$ sive post $F G$.

* Prop. 6. huj.

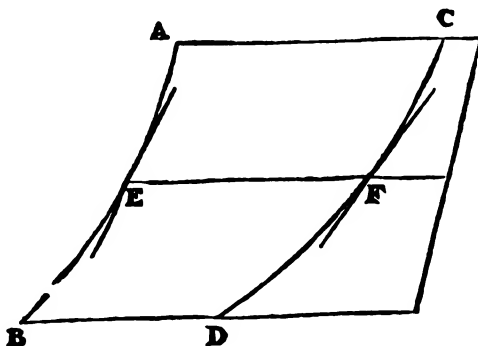
* Prop. 7. huj.

Similiter ostendetur, productis $D C$, $K H$ sursum, donec occurrant horizontali $A F$ in O & P , tempus per $C D$ post $A B C$, sive post $O C$, brevius esse tempore per $H K$ post $F G H$ sive post $P H$. Ac denique tempus per $D E$ post $A B C D$, brevius esse tempore per $K L$ post $F G H K$. Quare totum tempus descensus per $A B C D E$, brevius erit tempore per $F G H K L$. quod erat demonstrandum.

Hinc vero manifestum est, considerando curvas lineas tanquam ex innumeris rectis compositas, si fuerint duæ superficies, secundum lineas curvas ejusdem altitudinis inclinatae, quarum in punctis quibuscumque æque altis major semper sit inclinatio unius quam reliquæ, etiam tempore breviori per minus inclinatam grave descensurum quam per magis inclinatam.

Velut si sint duæ superficies inclinatae secundum curvas $A B$, $C D$, æqualis altitudinis, quarumque in punctis æque altis quibuscumque E, F , major sit inclinatio ipsius $C D$ quam $A B$, hoc est, ut

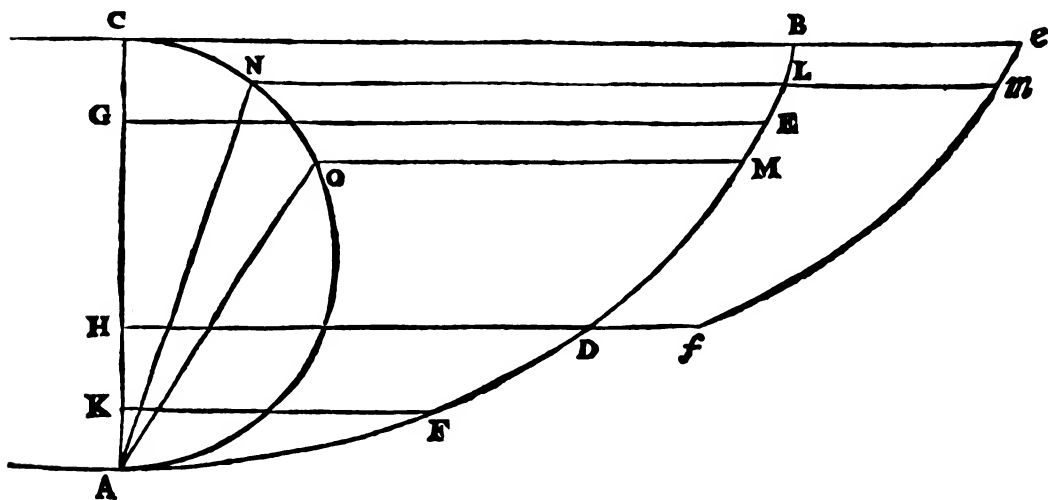
recta tangens curvam $C D$ in F , magis inclinata sit ad horizontem, quam quæ curvam $A B$ tangit in puncto E . erit tempus descensus per $A B$ brevius quam per $C D$.



Idemque continget si altera linearum rectæ fuerit: dummodo inclinatio rectæ, quæ ubique est eadem, major minorve fuerit inclinatione curvæ in quolibet sui puncto.

PROPOSITIO XXII.

Si in Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus stat, vertex deorsum spectante, dua portiones curvæ æqualis altitudinis accipiantur, sed quarum altera propior sit vertici, erit tempus descensus per superiorem, brevius tempore per inferiorem.



Sit Cyclois $A B$, cujus axis $A C$ ad perpendiculum erectus, vertex A deorsum spectet; & accipiantur in ea portiones $B D$ & $B F$, æqualis altitudinis, hoc est, ejusmodi ut parallelæ horizontales $B C$, $D H$, quæ superiorem portionem $B D$ includunt, æque inter
fe

se distent ac EG, FK , inferiorem portionem EF includentes. Dico tempus descensus per curvam BD brevius fore tempore per EF .

DE MOTU IN
CYCLOIDE.

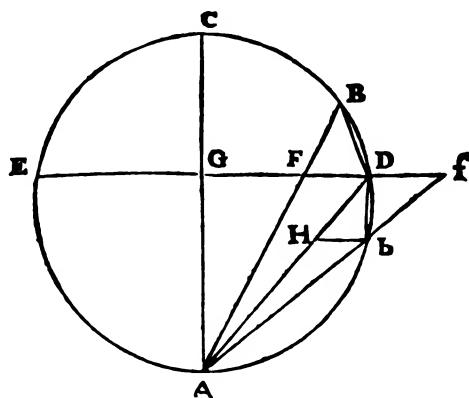
Sumatur enim in BD punctum quodlibet L , & in EF punctum M , ita ut eadem sit altitudo E supra M quæ B supra L . Et descripto super axe AC semicirculo, occurrant ei rectæ horizontales LN, MO , in N & O , & jungantur NA, OA . Itaque quum punctum N sit altius puncto O , manifestum est rectam NA minus ad horizontem inclinari quam OA . Est autem ipsi NA parallela tangens curvæ in L puncto*, & ipsi OA parallela tangens curvæ in M . Ergo curva BD in puncto L minus inclinata est quam curva EF in puncto M . Quod si igitur portio EF , invariata inclinatione, altius extolli intelligatur velut in ef , ita ut inter easdem parallelas cum portione BD comprehendatur, invenietur punctum m in m , æquali altitudine cum puncto L . eritque etiam inclinatio curvæ ef in puncto m , quæ eadem est inclinationi curvæ EF in M , major inclinatione curvæ BD in L . Similiter vero, & in quolibet alio puncto curvæ ef , major ostendetur inclinatio quam curvæ BD in puncto æque alto. Itaque tempus descensus per BD brevius erit tempore per ef *, sive, quod idem est, per EF . quod erat demonstrandum.

* Prop 15 huj.

* Prop præced.

L E M M A.

E Sto circulus diametro AC , quem secet ad angulos rectos DE , & à termino diametri A educta recta AB occurrat circumferentia in B , ipsi vero DE in F . Dico tres hæc, AB, AD, AF , proportionales esse.



Sit enim primo intersectio F intra circulum; & arcui BD recta subtensa ducatur. Quia igitur arcus æquales sunt AE, AD , erunt anguli ad circumferentiam ipsis insistentes, EDA, ABD æqua-

G

les. Itaque in triangulis ABD , ADF , æquales anguli ABD , ADF . Communis autem utrique est angulus ad A . Ergo dicti trianguli similes erunt, ideoque BA ad AD ut AD ad AF .

Sit jam punctum intersectionis f extra circumulum, & ducatur bH parallela DE , quæ occurrat rectæ AD in H . Itaque secundum jam demonstrata erit ut DA ad Ab , ita Ab ad AH , hoc est, ita Af ad AD : Ideoque rursus proportionales erunt Af , AD , Ab . Quare constat propositum.

PROPOSITIO XXIII.

Sit Cyclois ABC , cujus vertex A deorsum conversus sit, axe AD ad perpendicularum erecto: sumptoque in ea quolibet puncto B , ducatur inde deorsum recta BI quæ Cycloidem tangat, termineturque recta horizontali AI . recta vero BF ad axem perpendicularis agatur, & divisa bifariam FA in X , super ea describatur semicirculus FHA . Ductâ deinde per punctum quodlibet G in curva BA sumptum, rectâ ΣG parallelâ BF , quæ circumferentia FHA occurrat in H , axi AD in Σ , intelligantur per puncta G & H rectæ tangentes utriusque curvæ, earumque tangentium partes iisdem duabus horizontalibus MS , NT interceptæ sint MN , ST . Iisdemque rectis MS , NT includantur tangentis BI pars OP , & axis DA pars QR .

Quibus ita se habentibus, dico tempus quo grave percurreret rectam MN , celeritate æquabili quanta acquiritur descendendo per arcum Cycloidis BG , fore ad tempus quo percurreretur recta OP , celeritate æquabili dimidia ejus quæ acquiritur descendendo per totam tangentem BI , sicut est tangens ST ad partem axis QR .

Describatur enim super axe AD semicirculus DVA secans rectam BF in V , & ΣG in Φ , & jungatur AV secans rectas OQ , PR , $G\Sigma$ in E & K . Iungantur item HF , HA , HX & $A\Phi$; quæ postrema secet rectas OQ , PR in punctis Δ & Π .

Habet ergo dictum tempus per MN ad tempus per OP , rationem eam quæ componitur ex ratione ipsarum linearum MN ad OP , & ex ratione celeritatum quibus ipsæ percurruntur, contrarie sumpta*, hoc est, & ex ratione dimidiæ celeritatis ex BI sive ex FA , ad celeritatem ex BG , sive ex $F\Sigma$ *. Atqui tota celeritas ex

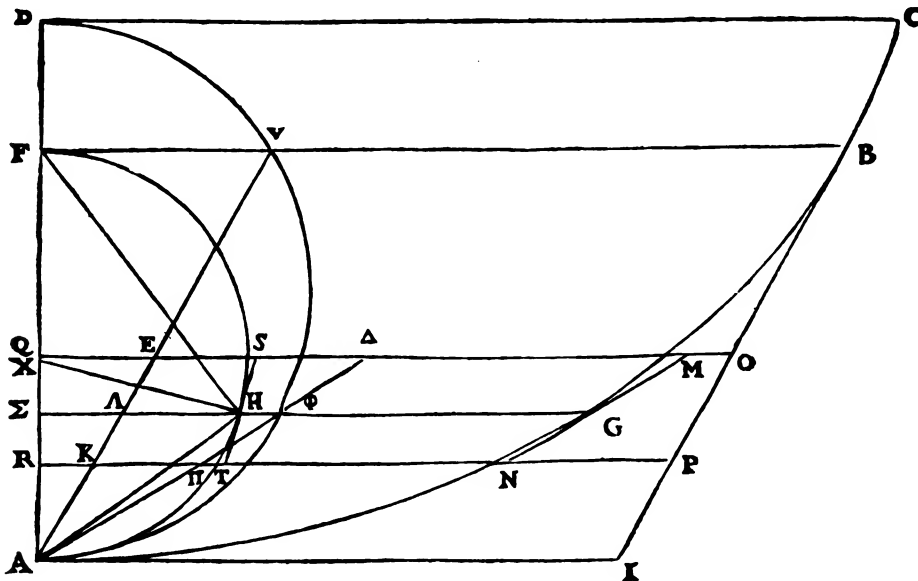
*Prop. 5. Galil.
de motu æ-
quab.
* Prop. 8. huj.

HOROLOG. OSCILLATOR.

51

FA ad celeritatem ex $F\Sigma$, est in subduplicata ratione longitudinum FA ad $F\Sigma^*$, ac proinde eadem quæ FA ad FH . Ergo dicta media celeritas ex FA ad celeritatem ex $F\Sigma$ erit ut FX ad FH . Itaque tempus dictum per MN ad tempus per OP habebit rationem compositam ex rationibus MN , ad OP , & FX ad FH . Harum vero prior ratio, nempe MN ad OP , eadem ostendetur quæ FH ad $H\Sigma$.

DE MOTU IN
CYCLOIDE.
* Prop. 3. huj.



Est enim tangens Cycloidis BT parallela rectæ VA , similiterque tangens MGN parallela rectæ ϕA ; ac proinde recta MN æqualis $\Delta\pi$, & OP æqualis EK . Ergo dicta ratio rectæ MN ad OP eadem est quæ $\Delta\pi$ ad EK ; hoc est, ΔA ad EA ; hoc est, ϕA ad ΛA ; hoc est VA ad ϕA^* . Est autem ut VA ad $\Lambda\phi$ ita FA ad ΛH ; nam quia quadratum VA æquale est rectangulo DAF , & quadratum $\Lambda\phi$ æquale rectangulo $DA\Sigma$, quæ rectangula sunt inter se ut FA ad ΣA , hoc est ut quadratum FA ad quadratum ΛH , erit proinde & quadratum VA ad quadratum ϕA ut quadratum FA ad quadratum ΛH ; atque etiam VA ad $\Lambda\phi$ longitudine, ut FA ad ΛH . Ratio itaque MN ad OP , eadem erit quæ FA ad ΛH , hoc est, propter triangula similia FAH , $FH\Sigma$, eadem quæ FH ad $H\Sigma$, ut dictum fuit. Itaque dicta ratio temporis per MN ad tempus per OP , componitur ex rationibus FX ad FH & FH ad $H\Sigma$, ideoque eadem erit quæ FX sive XH ad $H\Sigma$. Sicut autem radius XH ad $H\Sigma$, ita est tangens ST ad rectam QR ; hoc enim facile perspicitur. Igitur tempus motus qualem diximus per MN , ad tempus per OP constat esse sicut ST ad QR . quod erat demonstrandum.

* Lemma præced.

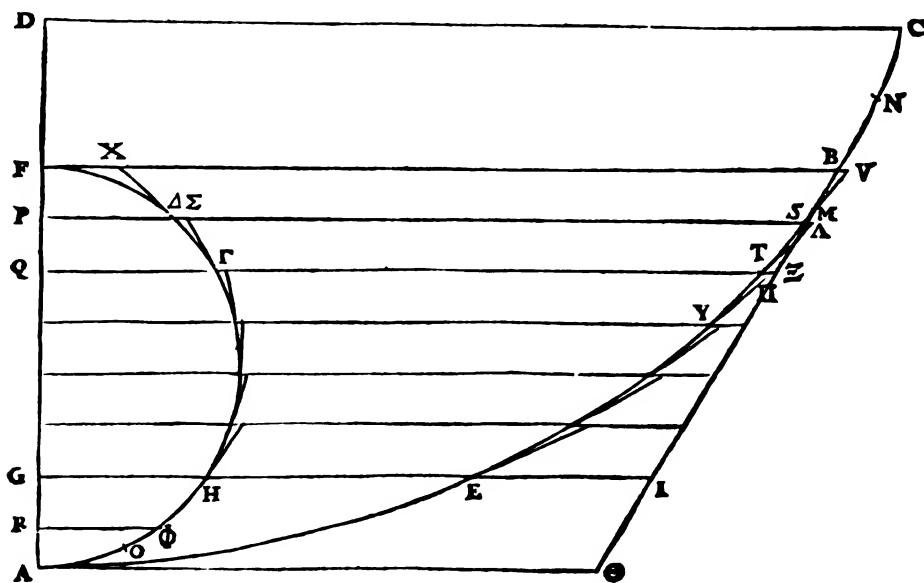
G ij

CHRISTIANI HUGENII
PROPOSITIO XXIV.

Sit rursus ut in precedenti propositione Cyclois ABC , cujus vertex A deorsum spectet, axis AD ad horizontem erectus sit; Et sumpto in ea quovis puncto B , ducatur inde deorsum recta $B\odot$ qua Cycloidem tangat, occurratque recta horizontali $A\odot$ in \odot : recta vero BF ad axem perpendicularis agatur, Et super FA describatur semicirculus FHA . Deinde alia recta GE , parallela FB , secet Cycloidem in E , rectam $B\odot$ in I , circumferentiam FHA in H , Et denique axem DA in G .

Dico tempus descensus per arcum Cycloidis BE , esse ad tempus per tangentem BI cum celeritate dimidia ex $B\odot$, sicut arcus FH ad rectam FG .

Si enim hoc verum non est, habebit tempus per arcum BE ad dictum tempus per BI , vel maiorem rationem quam arcus FH ad rectam FG vel minorem. Habeat primo, si fieri potest, maiorem.



Itaque tempus aliquod brevius tempore per BE (sit hoc tempus z) erit ad dictum tempus per BI ut arcus FH ad rectam FG . Quod si jam in Cycloide supra punctum B sumatur punctum aliud N , erit tempus per BE post NB , brevius tempore per BE . Manifestum est autem punctum N tam propinquum sumi posse ipsi B , ut differentia eorum temporum sit quamlibet exigua, ac proinde ut minor sit ea qua tempus z superatur à tempore per BE . Sit itaque

punctum N ita sumptum. unde quidem tempus per $B E$ post $N B$ DE MOTU IN CYCLOIDE. majus erit tempore Z , majoremque proinde rationem habebit ad tempus dictum per $B I$ cum dimidia celeritate ex $B \Theta$, quam arcus $F H$ ad rectam $F G$. Habeat itaque eam quam arcus $F H O$ ad rectam $F G$.

Dividatur $F G$ in partes æquales $F P$, $P Q$, &c. quarum unaquæque minor sit altitudine lineæ $N B$, atque item altitudine arcus $H O$; hoc enim fieri posse manifestum est; & à punctis divisionum agantur rectæ, basi $D C$ parallelæ, & ad tangentem $B \Theta$ terminatæ $P \Lambda$, $Q \Xi$, &c. Quibusque in punctis hæ secant circumferentiam $F H$, ab iis, itemque à puncto H , tangentes sursum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut $\Delta \kappa$, $\Gamma \Sigma$ &c. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ Cycloidi occurrunt, tangentes sursum ducantur velut $s v$, τm &c. additâ vero ad rectam $F G$ parte una $G R$ æquali iis quæ ex divisione, ductæque $R \phi$ parallelâ similiter ipsi $D C$, patet eam occurrere circumferentiæ $F H A$ inter H & O , quia $G R$ minor est altitudine puncti H supra O . Iam vero sic porro argumentabimur.

Tempus per tangentem $v s$ cum celeritate æquabili quæ acquireretur ex $B s$, majus est tempore motus continue accelerati per arcum $B s$ post $N B$. Nam celeritas ex $B s$ minor est celeritate ex $N B$, propterea quod minor altitudo $B s$ quam $N B$. At celeritas ex $B s$ æquabiliter continuari ponitur per tangentem $v s$, cum celeritas acquisita ex $N B$ continue porro acceleretur per arcum $B s$, qui arcus minor insuper est tangente $v s$, omnibusque partibus suis magis erectus quam ulla pars tangentis $v s$. Adeo ut omnino majus sit futurum tempus per tangentem $v s$ cum celeritate ex $B s$, tempore per arcum $B s$ post $N B$. Similiter tempus per tangentem $m \tau$, cum celeritate ex $B \tau$, majus erit tempore per arcum $s \tau$ post $N s$, & tempus post tangentem $\pi \gamma$ cum celeritate ex $B \gamma$, majus tempore per arcum $\tau \gamma$ post $N \tau$. Atque ita tempora motuum æquabilium per tangentes omnes usque ad infimam quæ tangit cycloidem in E , cum celeritatibus per singulas quantæ acquiruntur cadendo ex B ad usque punctum ipsarum contactus, majora simul erunt tempore per arcum $B E$ post $N B$. Eadem vero & minora essent, ut nunc ostendemus.

Considerentur enim denuo tempora eadem motuum æquabilium per tangentes cycloidis. Et est quidem tempus per tangentem $v s$ cum celeritate ex $B s$, ad tempus per rectam $B \Lambda$ cum celeritate dimidia ex $F A$, ut tangens circumferentiæ $\Delta \kappa$ ad partem

DE MOTU IN
CYCLOIDE.
* Prop. præced.

axis FP *. Similiterque tempus per tangentem MT , cum celeritate ex BT , ad tempus per rectam ΛZ cum eadem dimidia celeritate ex FA , ut tangens $\Gamma \Sigma$ ad rectam PQ . Atque ita deinceps singula tempora per tangentes cycloidis, quæ sunt eadem supradictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes sibi respondentes rectæ BI cum celeritate dimidia ex $B\Theta$, sicut tangentes circumferentiæ FH , iisdem parallelis comprehensæ, ad partes rectæ FG ipsis respondentes.

Sunt igitur quantitates quædam rectæ FP , PQ , &c. & totidem aliæ, tempora scilicet quibus percurruntur rectæ BA , ΛZ &c, motu æquabili cum celeritate dimidia ex $B\Theta$; Et unaquæque quantitas in prioribus ad sequentem eadem proportionem refertur, qua unaquæque posteriorum ad suam sequentem; sunt enim utrobique inter se æquales. Quibus autem proportionibus priores quantitates ad alias quasdam, nempe ad tangentes circuli ΔX , $\Gamma \Sigma$, &c, referuntur, iisdem proportionibus & eodem ordine posteriores quoque referuntur ad alias quasdam, nempe ad tempora motus qualem diximus per tangentes cycloidis VS , MT &c. Ergo, sicut se habent omnes simul priores ad omnes eas ad quas ipsæ referuntur, hoc est, sicut tota FG ad tangentes omnes $X\Delta$, $\Gamma \Sigma$, &c. ita tempus quo percurritur tota BI cum celeritate dimidia ex $B\Theta$, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis VS , MT , &c *. Et invertendo itaque, tempora motuum dictorum per tangentes cycloidis, ad tempus per rectam BI cum celeritate dimidia ex $B\Theta$, eandem rationem habebunt quam dictæ tangentes omnes circumferentiæ FH ad rectam FG ; ac minorem proinde quam arcus FO ad rectam eandem FG ; quia arcus $F\Phi$, ideoque omnino & arcus FO maior est dictis omnibus arcibus FH tangentibus *. Atqui tempus per BE post NB , ad tempus per BI cum celeritate dimidia ex $B\Theta$, posuimus esse ut arcus FO ad rectam FG . Ergo dicta tempora omnia per tangentes cycloidis minora simul erunt tempore per BE post NB , cum antea maiora esse ostensum sit; quod est absurdum. Itaque tempus per arcum cycloidis BE , ad tempus per tangentem BI , cum celeritate dimidia ex $B\Theta$ vel ex FA , non habet maiorem rationem quam arcus circumferentiæ FH ad rectam FG .

Habeat jam, si potest, minorem. Ergo tempus aliquod majus tempore per arcum BE , (sit hoc tempus Z) erit ad tempus dictum per BI , ut arcus FH ad rectam FG .

Quod si jam sumatur arcus NM æqualis altitudine cum arcu B

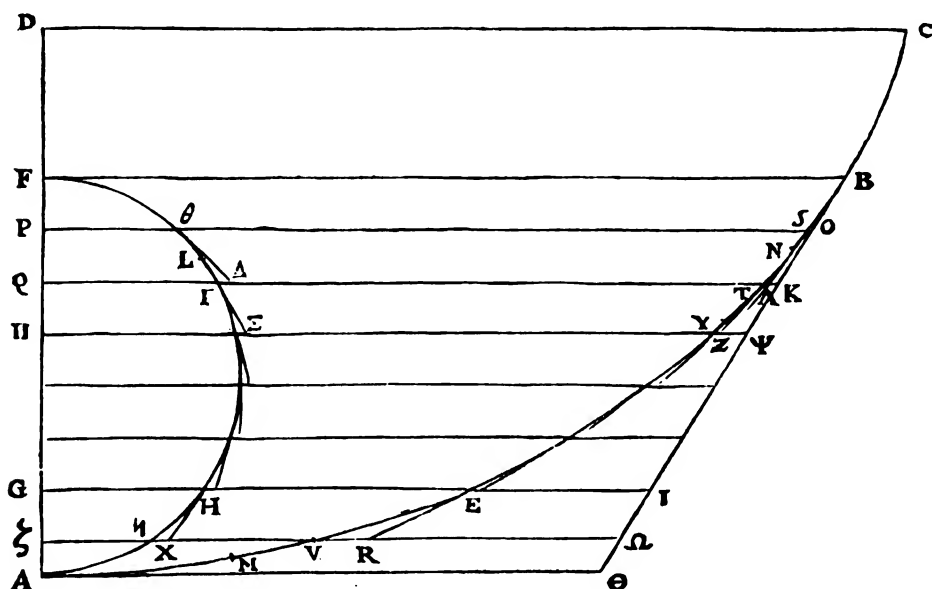
* Prop. 2. Archimedis de Sphæroid. & Conoid.

* Prop. 20 huj.

E, sed cujus terminus superior N fit humilior puncto B, erit tem-
 pus per arcum N M majus tempore per arcum B E*. Manifestum
 autem quod punctum N tam propinquum sumi potest puncto B, ut
 differentia dictorum temporum sit quamlibet exigua, ac proinde
 minor ea qua tempus Z superat tempus per arcum B E. Sit itaque
 punctum N ita sumptum. Vnde quidem tempus per N M minus
 erit tempore Z, habebitque proinde ad dictum tempus per B I, cum
 dimidia celeritate ex B @, minorem rationem quam arcus F H ad
 rectam F G. Habeat ergo eam quam arcus L H ad rectam F G.

DE MOTU IN CYCLOIDE.

*Prop. 22.huj.



Dividatur jam FG in partes æquales FP , PQ , &c. quarum unaquæque minor sit arcus cycloidis BN altitudine, itemque minor altitudine arcus circumferentiæ FL ; & additâ ad FG unâ earum partium $G\zeta$, ducantur à punctis divisionum rectæ basi DC parallelæ, & ad tangentem $B\Theta$ terminatæ, PO , QK , &c; itemque à puncto ζ recta $\zeta\Omega$ quæ secet cycloidem in v , circumferentiam in n , quibusque in punctis ductæ parallelæ secant circumferentiam FH , ab iis tangentes deorsum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut $\theta\Delta$, $\Gamma\Sigma$: Quarum infima à puncto H ducta occurrat rectæ $\zeta\Omega$ in x . Similiter vero & à punctis, in quibus ductæ parallelæ occurrunt cycloidi, ducantur totidem tangentes deorsum, velut $s\Lambda$, $T\Xi$, &c. quarum infima, tangens nempe à puncto E ducta, occurrat rectæ $\zeta\Omega$ in R .

Quia igitur $p\zeta$ æqualis est fg altitudini arcus be , cui æqualis est ex constructione altitudo arcus nm , erit & $p\zeta$ æqualis altitudini arcus nm . Est autem recta po ex constructione superior ter-

DE MOTU IN
CYCLOIDE.

mino N . Ergo & $\zeta \Omega$, & in ea punctum v , superius termino M . Quare, cum arcus sv æqualis sit altitudinis cum arcu NM , sed termino s sublimiore quam N , erit tempus per sv brevius tempore per NM *.

* Prop. 12. huj.

Atqui tempus per tangentem $s\Lambda$, cum celeritate æquabili ex Bs , brevius est tempore descensus accelerati per arcum $s\tau$, incipientis in s . Nam celeritas ex Bs , qua tota $s\Lambda$ transmissa ponitur, æqualis est celeritati ex $s\tau$ *, quæ motui per arcum $s\tau$ in fine demum acquiritur; ipsaque $s\Lambda$ minor est quam $s\tau$. Similiter tempus per tangentem $\tau\Xi$, cum celeritate æquabili ex $B\tau$, brevius est tempore descensus accelerati per arcum $\tau\chi$ post $s\tau$; quum celeritas ex $B\tau$, qua tota $\tau\Xi$ transmissa ponitur, sit æqualis celeritati ex $s\chi$, quæ in fine demum acquiritur motui dicto per arcum $\tau\chi$ post $s\tau$; ipsaque $\tau\Xi$ minor sit arcu $\tau\chi$. Atque ita tempora omnia motuum æquabilium per tangentes cycloidis, cum celeritatibus per singulas quantæ acquiruntur descendendo ex B usque ad punctum ipsarum contactus, breviora simul erunt tempore descensus accelerati per arcum sv . Eadem vero & longiora essent, ut nunc ostendemus.

* Prop. præced.

Est enim tempus dictum per tangentem $s\Lambda$, cum celeritate æquabili ex Bs ; ad tempus per rectam $o\kappa$ cum celeritate æquabili dimidia ex $B\theta$, sicut tangens semicirculi $\theta\Delta$ ad rectam $p\zeta$ *. similiterque tempus per tangentem $\tau\Xi$, cum celeritate æquabili ex $B\tau$, est ad tempus per rectam $\kappa\psi$ cum celeritate æquabili dimidia ex $B\theta$, ut tangens $\Gamma\Sigma$ ad rectam $q\pi$. Atque ita deinceps singula tempora per tangentes cycloidis, quæ sunt eadem supra dictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes sibi respondentes rectæ $o\Omega$, cum celeritate dimidia ex $B\theta$, ut tangentes circumferentiæ $\theta\eta$, iisdem parallelis inclusæ, ad partes rectæ $p\zeta$ ipsis respondentes. Vnde, ut in priori parte demonstrationis, concludetur omnes simul rectas $p\zeta$, $q\pi$ &c. hoc est, totam $p\zeta$ esse ad omnes simul tangentes $\theta\Delta$, $\Gamma\Sigma$, &c. sicut tempus quo percurritur tota $o\Omega$, cum celeritate dimidia ex $B\theta$, ad tempora omnia moruum quales diximus per tangentes cycloidis $o\Lambda$, $\tau\Xi$, &c. Quare & convertendo, tempora omnia per tangentes cycloidis, eam rationem habebunt ad tempus dictum motus æquabilis per rectam $o\Omega$, sive per BI , quam dictæ tangentes omnes arcus $\theta\eta$ ad rectam $p\zeta$ vel FG , ac proinde maiorem quam arcus LH ad rectam FG ; est enim arcus $\theta\eta$, adeoque etiam omnino arcus LH , minor dictis tangentibus arcus $\theta\eta$ *. Sed tempus per NM posui-

* Prop. 20. huj.

mus

mus ab initio ad idem tempus per $B I$ se habere ut arcus $L H$ ad rectam $F G$. Ergo tempus per $N M$, multoque magis tempus per $s v$, minus erit tempore per tangentes cycloidis. Quod est absurdum, cum hoc tempus, illo per arcum $s v$, antea minus ostensum fuerit. Patet igitur tempus per arcum cycloidis $B E$ ad tempus per tangentem $B I$ cum celeritate æquabili dimidia ex $B \Theta$, non minorem rationem habere quam arcus $F H$ ad rectam $F G$. Sed nec maiorem habere ostensum fuit. Ergo eandem habeat necesse est. quod erat demonstrandum.

DE MOTU IN
CYCLOIDE.

PROPOSITIO XXV.

IN Cycloide cujus axis ad perpendicularum erectus est, vertice deorsum spectante, tempora descensus quibus mobile, à quocunque in ea puncto dimissum, ad punctum imum verticis pervenit, sunt inter se aequalia; habentque ad tempus casus perpendicularis per totum axem cycloidis eam rationem, quam semicircumferentia circuli ad diametrum.

Est cyclois $A B C$ cujus vertex A deorsum spectet, axis vero $A D$ ad perpendicularum erectus sit, & à puncto quovis in cycloide sumpto, velut B , descendat mobile impetu naturali per arcum $B A$, sive per superficiem ita inflexam. Dico tempus descensus hujus esse ad tempus casus per axem $D A$, sicut semicircumferentia circuli ad diametrum. Quo demonstrato, etiam tempora descensus, per quoslibet cycloidis arcus ad A terminatos, inter se æqualia esse constabit.

Describatur super axe $D A$ semicirculus, cujus circumferentiam fecet recta $B F$, basi $D C$ parallela, in E ; junctâque $E A$, ducatur ei parallela $B G$, quæ quidem cycloidem tanget in B . Eadem vero occurrat rectæ horizontali per A ductæ in G : sitque etiam super $F A$ descriptus semicirculus $F H A$.

Est igitur, per præcedentem, tempus descensus per arcum cycloidis $B A$, ad tempus motus æquabilis per rectam $B G$ cum celeritate dimidia ex $B G$, sicut arcus semicirculi $F H A$ ad rectam $F A$. Tempus vero dicti motus æquabilis per $B G$, æquatur tempori descensus naturaliter accelerati per eandem $B G$, sive per $E A$, quæ ipsi parallela est & æqualis, hoc est, tempori descensus accelerati per axem $D A$ *. Itaque tempus per arcum $B A$, erit quoque ad tempus descensus per axem $D A$, ut semicirculi circumferentia $F H A$ ad diametrum $F A$. quod erat demonstrandum.

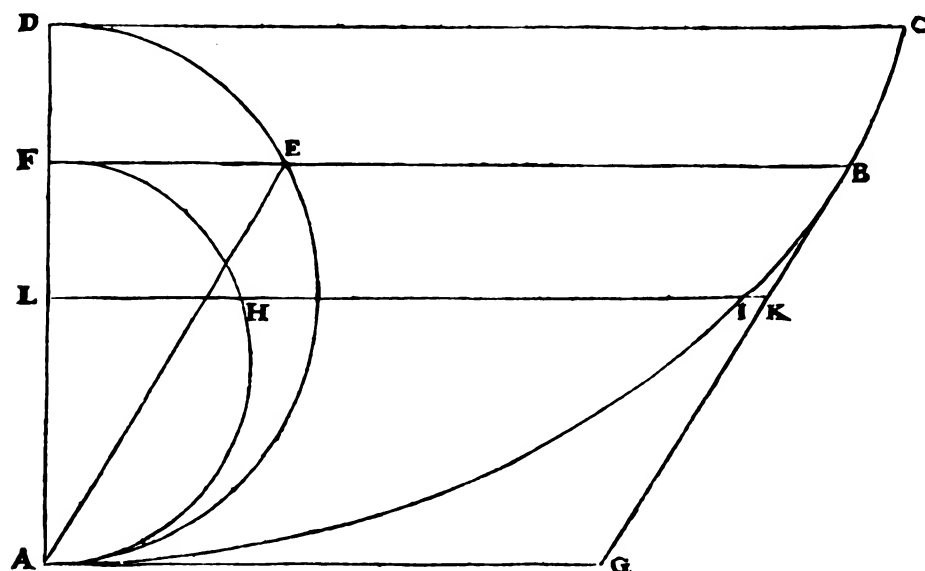
* Prop. 6. Galil. de motu Accel.

H

Quod si tota cycloidis cavitas perfecta ponatur, constat mobile, postquam per arcum BA descenderit, inde continuato motu per alterum ipsi æqualem arcum ascensurum*, atque in eo rursus tandem temporis atque descendendo consumpturum*. Deinde

*Prop. 9. huj.

*Prop. 11. huj.



rursus per A ad B perventurum, ac singularum ejusmodi reciprocationum, in magnis parvisve cycloidis arcibus peractarum, tempora fore ad tempus casus perpendicularis per axem DA , sicut circumferentia circuli tota ad diametrum suam.

PROPOSITIO XXVI.

Iisdem positis, si ducatur insuper recta horizontalis HI qua arcum BA secet in I , circumferentiam vero FHA in H : dico tempus per arcum BI , ad tempus per arcum IA post BI , eam rationem habere quam arcus circumferentia FH ad HA .

Occurrat enim recta HI tangenti BG in K , axi DA in L . Est itaque tempus per arcum BA , ad tempus motus æquabilis per BG cum celeritate dimidia ex BG , sicut arcus FHA ad rectam FA *. Tempus autem dicti motus æquabilis per BG , est ad tempus motus æquabilis per BK , cum eadem celeritate dimidia ex BG , sicut BG ad BK longitudine, hoc est, sicut FA ad FL . Et rursus tempus motus æquabilis, cum dicta celeritate, per BK , ad tempus per arcum BI , sicut FL ad arcum FH *. Igitur ex æquo erit tempus per arcum BA ad tempus per BI , ut arcus FHA ad FH . Et dividendo, & convertendo, tempus per BI , ad tempus per IA post BI , ut arcus FH ad HA . quod erat demonstrandum.

*Prop. 14. huj.

*Prop. 14. huj.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS TERTIA.

De linearum curvarum evolutione & dimensione.

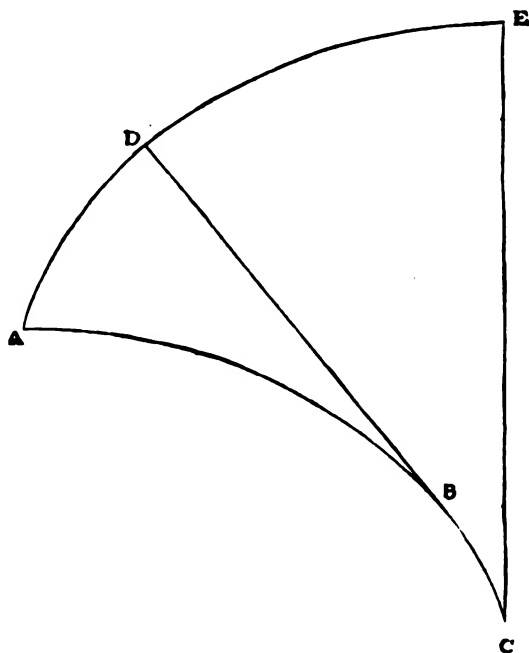
DEFINITIONES.

I.

LINEA in unam partem inflexa vocetur quam recta omnes tangentes ab eadem parte contingunt. Si autem portiones quasdam rectas lineas habuerit, ha ipsa producta pro tangentibus habentur.

II.

Cum autem dua hujusmodi linea ab eodem puncto egrediuntur, quarum convexitas unius obversa sit ad cavitatem alterius, quales sunt in figura adscripta curva ABC, ADE, amba in eandem partem cava dicantur.



III.

Si linea, in unam partem cava, filum seu linea flexilis circumplicata intelligatur, & manente una fili extremitate illi

H ij

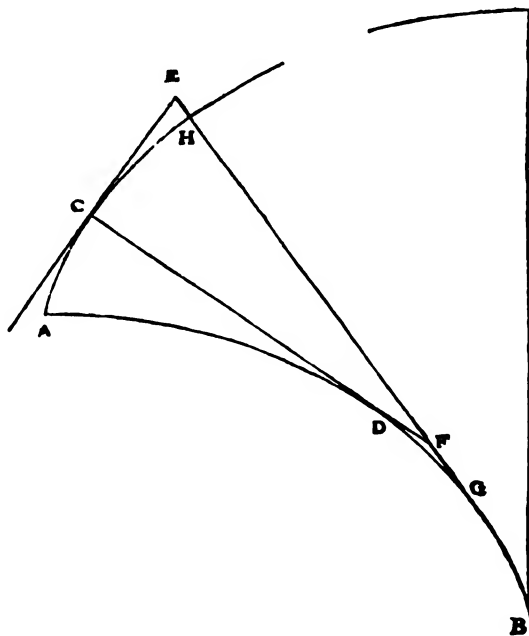
DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE. *affixa, altera extremitas abducatur, ita ut pars ea quæ soluta est semper extensa maneat; manifestum est curvam quandam aliam hac fili extremitate describi. Vocetur autem ea, Descripta ex evolutione.*

IV.

Illa vero cui filum circumplicatum erat, dicatur Evoluta. In figura superiori, A B C est evoluta, A D E descripta ex evolutione A B C, ut nempe cum extremitas fili ex A venit in D, pars fili extensa sit D B recta, reliqua parte B C adhuc applicata curvæ A B C. Manifestum est autem D B tangere evolutam in B.

PROPOSITIO I.

Recta omnis, quae evolutam tangit, occurret lineæ ex evolutione descripta ad angulos rectos.

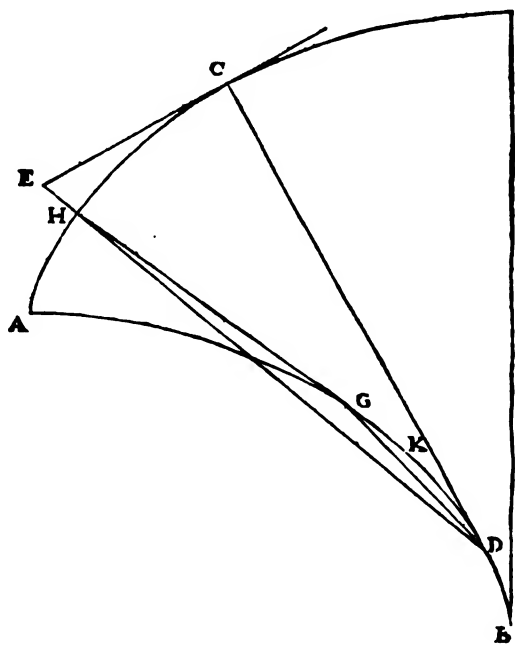


Sit AB evoluta, AH vero quæ ex evolutione illius descripta est. Recta autem FD , tangens curvam AD in D , occurrat in C curvæ AH . Dico ei occurrere ad angulos rectos: hoc est, si ducatur CE recta perpendicularis CD , dico eam in C tangere curvam AH . Quia enim DC tangit evolutam in D , apparet ipsam referre positionem fili tunc cum ejus extremitas pervenit in C . Quod si igitur ostenderimus filum, in tota reliqua descriptione curvæ AH , nusquam pertingere ad rectam CE præterquam in C puncto, ma-

nifestum erit rectam C & ibidem curvam $A C H$ contingere.

DE LINEARUM
CURVARUM
EVOLUTIONE.

Sumatur punctum aliquod in a c præter c , quod sit h , sitque primo remotius à principio evolutionis a quam punctum c , & intelligatur pars libera esse h g, cum extremitate sua ad h per-
venit. Tangit ergo h g lineam ab in g . Cumque interea dum de-
scribitur pars curvæ ch , evolutus sit arcus dg , occurreret cd à
parte d producta ipsi h g, ut in f . Ponatur autem g h occurrere
rectæ ce in e . Quia igitur duæ simul df , fg , majores sunt quam
 dg , sive curva ea fuerit sive recta: fiet addendo utrinque rectam
 dc , ut rectæ cf , fg simul majores sint recta cd & ipsa dg . Sed
propter evolutionem, apparet utrisque simul, rectæ cd , & lineæ
 dg , æquari rectam hg . Ergo duæ simul cf , fg majores quo-
que erunt recta hg ; & ablata communi fg , erit cf major quam
 hf . Sed fe major est quam fc , quia angulus c trianguli fce est
rectus. Ergo fe omnino major quam fh . Vnde apparet, ab hac
quidem parte puncti c , fili extremitatem non pertingere ad re-
ctam ce .



Sit jam punctum h propinquius principio evolutionis A quam punctum C . sitque fili positio h G , tunc cum ejus extremitas esset in h , & ducantur rectæ $D G$, $D h$, quarum hæc occurrat rectæ $C B$ in E . apparet autem $D G$ rectam non posse esse in directum ipsi $h G$, adeoque $h G D$ fore triangulum. Iam quia recta $D G$ vel minor est quam $D K G$, vel eadem, si nempe evolutæ pars $D G$ recta sit; addidâ utrique $G h$, erunt rectæ $D G$, $G h$ simul minores vel

H iij

æquales duabus istis, scilicet DKG & $G H$, sive his æquali rectæ DC . Duabus autem rectis DG , GH minor est recta DH . Ergo hæc minor utique erit recta DC . Sed DE major est quam DC , quia in triangulo DCE angulus C est rectus. Ergo DH multo minor quam DE . Situm est ergo punctum H , hoc est extremitas fili GH , intra angulum $DC E$. Vnde apparet neque inter A & C usquam illam pertingere ad rectam CE . Ergo CE tangit curvam AC in C ; ac proinde DC , cui CE ducta est perpendicularis, occurrit curvæ ad angulos rectos. quod erat demonstrandum.

Hinc etiam manifestum est curvam AHC in partem unam inflexam esse, & in eandem partem cavam ac ipsa AGB , cujus evolutione descripta est. Omnes enim tangentes lineæ AHC , cadunt extra spatium $DGAHC$: omnes vero tangentes lineæ AGD , intra dictum spatium. unde liquet cavitatem AHC respicere convexitatem AGD .

PROPOSITIO II.

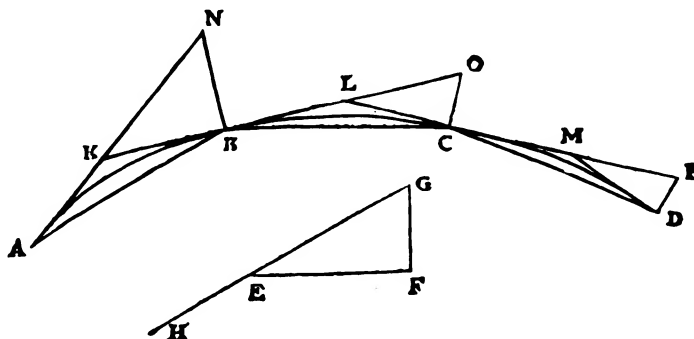
Omnis curva linea terminata, in unam partem curva, ut ABD , potest in tot partes dividi, ut si singulis partibus subtensa rectæ ducantur, velut AB , BC , CD ; & à singulis item divisionis punctis, ipsaque curvæ extremitate rectæ ducantur curvæ tangentes, ut AN , BO , CP , quæ occurrant iis quæ in proxime sequentibus divisionis punctis curvæ ad angulos rectos insistant, quales sunt lineæ BN , CO , DP ; ut inquam subtensa quæque habeat ad sibi adjacentem curvæ perpendicularem, velut AB ad BN , BC ad CO , CD ad DP , rationem majorem quavis ratione proposita.

Sit enim data ratio lineæ EF ad FG , quæ recto angulo ad F jungantur, & ducatur recta GEH .

Intelligatur primo curva ABD in partes tam exiguas secta punctis B , C , ut tangentes quæ ad bina quæque inter se proxima puncta curvam contingunt, occurrant sibi mutuo secundum angulos qui singuli majores sint angulo FEH ; quales sunt anguli AKB , BLC , CMD . quod quidem fieri posse evidentius est quam ut demonstratione indigeat. Ductis jam subtensis AB , BC , CD , & erectis curvæ perpendicularibus BN , CO , DP , quæ occurrant productis AK , BL , CM , in N , O , P : dico rationes singulas rectarum, AB ad BN , BC ad CO , CD ad DP , majores esse ratione EF ad FG .

Quia enim angulus $\angle K B N$ major est angulo $\angle H E F$, erit residuus illius ad duos rectos, nimirum angulus $\angle N K B$, minor angulo $\angle G E F$.

DE LINEARUM
CURVARUM
EVOLUTIONE.

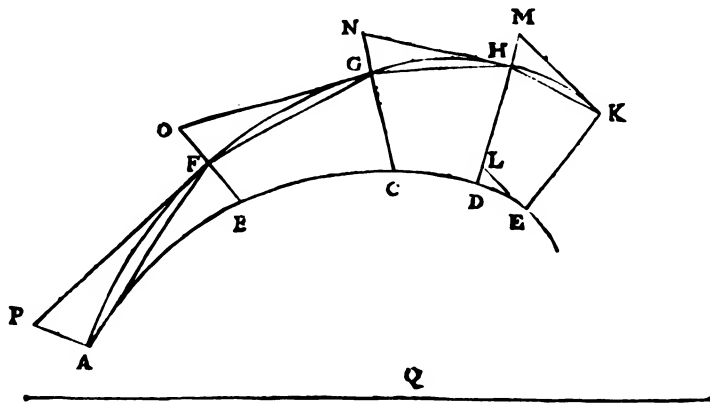


Angulus autem $\angle B$ trianguli $\triangle K B N$ est rectus, sicut & angulus $\angle F$ in triangulo $\triangle E F G$. Ergo major erit ratio $K B$ ad $B N$ quam $E F$ ad $F G$. Sed $A B$ major est quam $K B$, quoniam angulus $\angle K$ in triangulo $\triangle A K B$ est obtusus, est enim major angulo $\angle H E F$ qui est obtusus ex constructione. Ergo ratio $A B$ ad $B N$ major erit ratione $K B$ ad $B N$, ac proinde omnino major ratione $E F$ ad $F G$. Eodem modo & ratio $B C$ ad $C O$, & $C D$ ad $D P$, major ostendetur ratione $E F$ ad $F G$. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO III.

D*Va curva in unam partem inflexa & in easdem partes cava ex eodem puncto egredi nequeunt, ita ad se invicem comparata, ut recta omnis qua alteri earum ad angulos rectos occurrit, similiter occurrat & reliqua.*

Sint enim, si fieri potest, hujusmodi lineæ curvæ $A C E$, $A G K$, communem terminum habentes A , & sumpto in exteriori illarum



puncto quolibet K , sit indeeducta $K E$ recta, curvæ $A G K$ occurrens ad angulos rectos, ac proinde etiam curvæ $A C E$.

Potest jam recta quædam sumi major curva $\kappa G A$, quæ sit Q . Divisa autem intelligatur ipsa $\kappa G A$, ut in propositione antecedenti dictum fuit, in tot partes punctis $H G F$, ut subtenſæ singulæ κH , $H G$, $G F$, $F A$, ad perpendiculares curvæ sibi contiguas $H M$, $G N$, $F O$, $A P$ majorem rationem habeant quam linea Q ad rectam κE . Itaque & omnes simul dictæ subtenſæ ad omnes dictas perpendiculares majorem habebunt rationem quam Q ad κE . Producantur autem perpendiculares eadem & occurrant curvæ $A C B$ in D , C , B , nimirum ad angulos rectos ex hypothesi. Erit jam κE minor quam $M D$. Etenim, ducta $E L$ ipsi κE perpendiculari, quoniam κE occurrit lineæ curvæ $E C A$ ad angulos rectos, tanget $E L$ curvam $A C B$, occurretque necessario rectæ $M D$ inter D & M . Vnde cum κE sit brevissima omnium quæ cadunt inter parallelas $E L$, κM , erit ea minor quam $M L$, ac proinde minor quoque omnino quam $M D$. Eodem modo & $H D$ minor ostendetur quam $N C$, & $G C$ minor quam $O B$, & $F B$ minor quam $P A$. Cum sit ergo $P A$ major quam $F B$, erunt duæ simul $P A$, $O F$ majores quam $O B$. Item quum $O B$ sit major quam $G C$, erunt duæ simul $O B$, $N G$, majores quam $N C$. Sed duæ $P A$, $O F$ majores erant quam $O B$. Itaque tres simul $P A$, $O F$, $N G$ omnino majores erunt quam $N C$. Rursus, quia $N C$ major quam $H D$, erunt duæ simul $N C$, $M H$ majores quam $M D$. Vnde, si loco $N C$ sumantur tres hæ ipsæ majores $P A$, $O F$, $N G$, erunt omnino hæ quatuor $P A$, $O F$, $N G$, $M H$ majores quam $M D$: ac proinde eadem quoque omnino majores recta κE , quia ipsa $M D$ major erat quam κE . Diximus autem subtenſas omnes $A F$, $F G$, $G H$, $H K$ majorem rationem habere ad omnes perpendiculares $P A$, $O F$, $N G$, $M H$, quam linea Q ad κE . Ergo cum dictis perpendicularibus minor etiam sit κE , habebunt dictæ subtenſæ ad κE omnino majorem rationem quam Q ad κE . Ergo subtenſæ simul sumptæ majores erunt recta Q . Hæc autem ipsa curvâ $A G \kappa$ major sumpta fuit. Ergo subtenſæ $A F$, $F G$, $G K$, $H K$ simul majores erunt curva $A G \kappa$ cujus partibus subtenduntur; quod est absurdum, cum singulæ suis arcibus sint minores. Non igitur poterunt esse duæ curvæ lineæ quæ quemadmodum dictum fuit sese habeant. quod erat demonstrandum.

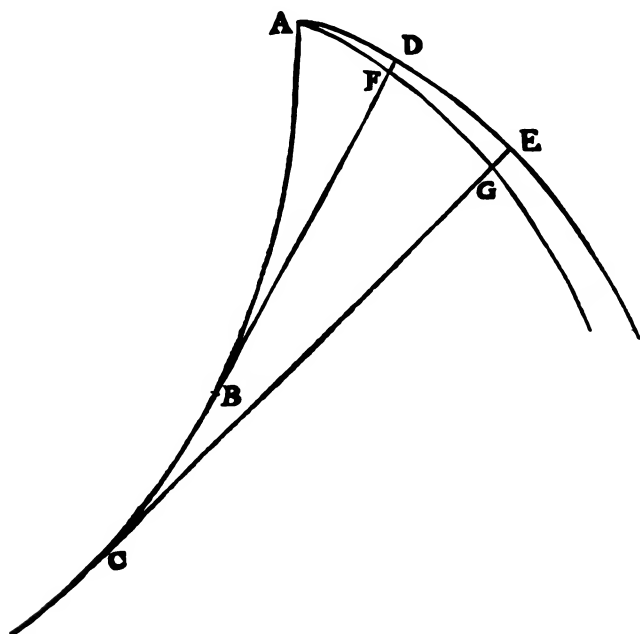
PROPOSITIO IV.

Si ab eodem puncto dua lineæ exeant in partem unam inflexæ, & in eandem partem cavæ, ita vero mutuo comparatæ

parata ut rectæ omnes, quæ alteram earum contingunt, alteri occurrant ad angulos rectos; posterior hac prioris evolutione, à puncto communi cæpta, describetur.

DE LINEARUM
CURVARUM
EVOLUTIONE.

Sunto lineæ $A B C$, $A D E$; in partem unam inflexæ, & quarum utraque in easdem partēs cava existat, habeantque communem terminum A punctum. Omnes autem rectæ tangentes lineam $A B C$, velut $B D$, $C E$, occurrant lineæ $A D E$ ad angulos rectos. Dico evolutione ipsius $A B C$, à termino A incepta, describi $A D E$.



Si enim fieri potest, describatur dicta evolutione alia quædam curva $A F G$. Ergo lineæ rectæ quælibet, evolutam $A B C$ tangentes, ut $B D$, $C E$, occurrant ipsi $A F G$ ad angulos rectos *, puta in F & G . Sed eædem tangentes etiam ad rectos angulos occurrere ponuntur lineæ $A D E$. Sunt igitur lineæ curvæ $A D F$, $A F G$, eodem puncto A terminatæ, inque partem unam flexæ, & ambæ in eandem partem cavæ, quippe utraque in eandem atque ipsa $A B C$; nam de linea $A D E$ constat ex hypothesi, de $A F G$ vero ex propositione prima hujus; & omnes quæ uni earum occurrunt ad angulos rectos, etiam alteri similiter occurrunt. quod quidem fieri non posse antea ostensum est *. Quare constat ipsam $A D E$ descriptum

* Prop. 1. huj.

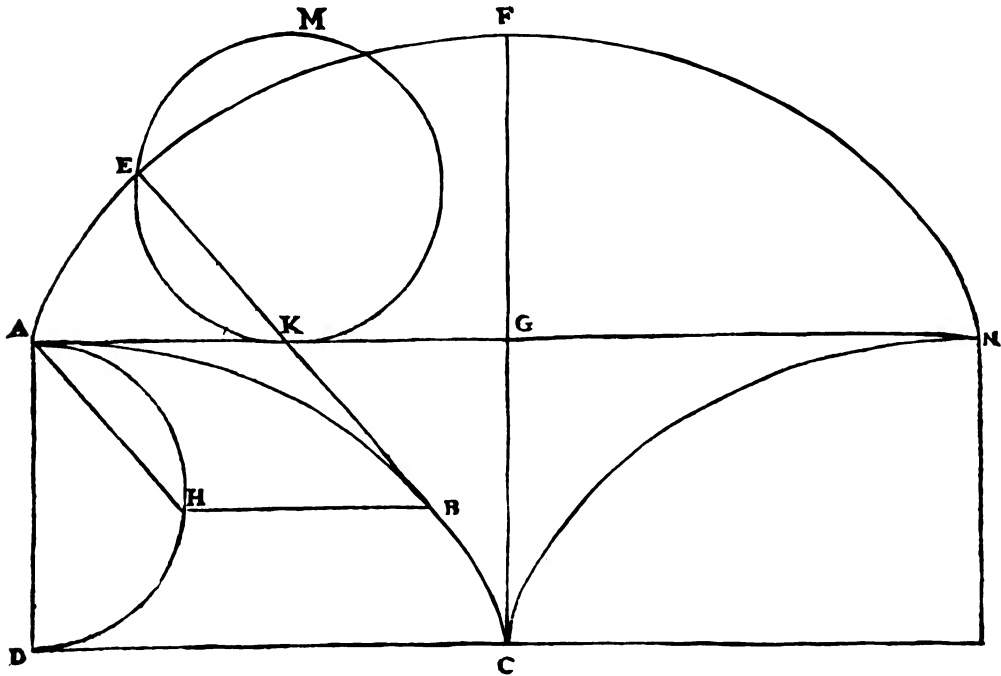
* Prop. 3. huj.



PROPOSITIO V.

S*I Cycloidem recta linea in vertice contingat, super qua, tanquam basi, alia cyclois priori similis & aequalis constituatur, initium sumens à puncto dicti verticis; recta qualibet inferiorem cycloidem tangens, occurret superioris portioni, sibi superposita, ad angulos rectos.*

Tangat cycloidem $A B C$ in vertice A recta $A G$, super qua, tanquam basi, similis alia cyclois constituta sit $A E F$, cujus vertex F . Cycloidem autem $A B C$ tangat recta $B K$ in B . Dico eam productam occurrere cycloidi $A E F$ ad angulos rectos.



Describatur enim circa AD , axem cycloidis ABC , circulus genitor AHD , cui occurrat BH , basi parallela, in H , & jungatur HA . Quia ergo BK tangit cycloidem in B , constat eam parallelam esse rectæ HA *. Itaque $AHBK$ parallelogrammum est, ac proinde AK æqualis HB , hoc est, arcui AH *. Sit porro jam descriptus circulus KM , genitori circulo, hoc est ipsi AHD , æqualis, qui tangat basin AG in K , rectam vero BK productam secet in puncto E . Quia ergo ipsi AH parallela est BK , ac proinde angulus EKA æqualis KAH , manifestum est BK productam abscindere à circulo KM arcum æqualem ei quem à circulo AHD abscindit recta AH . Itaque arcus KE æqualis est arcui AH , hoc est rectæ HB , hoc est rectæ KA . Hinc

* Propos. 15.

partis 2.

* Propos. 14.
partis 2.

vero sequitur, ex cycloidis proprietate, cum circulus genitor MK tangebatur regulam in κ , punctum describens fuisse in ε . Itaque recta $\kappa \varepsilon$ occurrit cycloidi in ε ad angulos rectos*. Est autem $\kappa \varepsilon$ ipsa $B \kappa$ producta. Ergo patet productam $B \kappa$ occurrere cycloidi ad angulos rectos. quod erat demonstrandum.

DE LINEARUM
CURVARUM
EVOLUTIONE.
* Propof. 15.
partis 2.

PROPOSITIO VI.

Semicycloidis evolutione, à vertice cœpta, alia semicyclois describitur evoluta æqualis & similis, cujus basis est in ea recta quæ cycloidem evolutam in vertice contingit.

Sit semicyclois ABC , cui superimposita sit alia similis AEF , quemadmodum in propositione præcedenti. Dico, si linea flexilis, circa semicycloidem ABC applicata, evolvatur, incipiendo ab A , eam describere extremitate sua ipsam semicycloidem AEF . Quia enim ex puncto A egrediuntur semicycloides ABC , AEF , in unam partem inflexæ, & ambæ in eandem cavæ, ac præterea ita comparatæ, ut omnes tangentes semicycloidis ABC occurrant semicycloidi AEF ad angulos rectos, sequitur hanc evolutione illius, à termino A incepta, describi*. quod erat demonstrandum.

* Propof. 4.
huj.

Et apparet, si dimidiam cycloidem, ipsi ABC gemellam, contrario situ ab altera parte lineæ CC disponamus, velut CN , ejus evolutione, vel etiam dum filum, jam extensum in CF , circa eam replicatur, alteram semicycloidem FN fili extremitate descriptum iri, quæ simul cum priora AEF integram constituat.

Atque ex his, & propositione 25 de descensu gravium, manifestum jam est quod supra in Constructione Horologii de æquali penduli motu dictum fuit. Patet enim perpendiculum, inter laminas binas, secundum semicycloidem inflexas, suspensum agitatumque, motu suo cycloidis arcum describere, ac proinde æqualibus temporibus quolibet ejus reciprocationes absolvi. Non refert enim utrum in superficie, secundum cycloidem curvata, mobile feratur, an filo alligatum lineam ipsam in aëre percurrat, cum utrobique eandem libertatem, eandemque in omnibus curvæ punctis inclinationem ad motum habeat.

PROPOSITIO VII.

Cyclois linea sui axis, sive diametri circuli genitoris, quadrupla est.

I ij

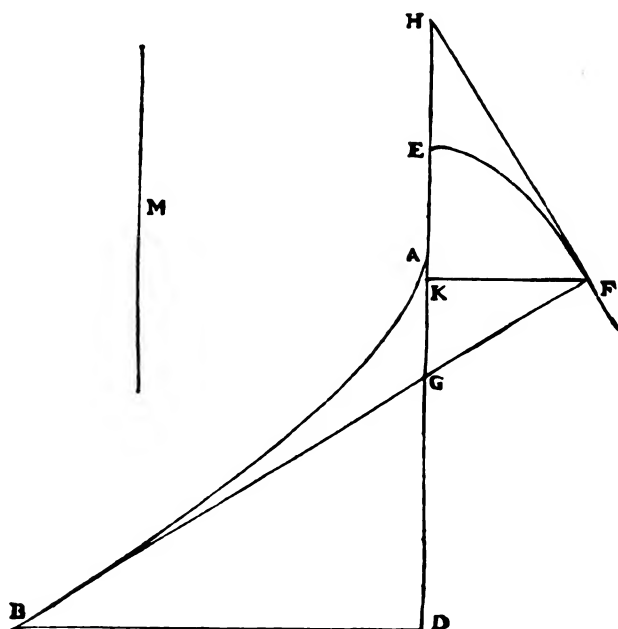
visse, ac plana & solida dimensum esse. Item centra gravitatis DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE. tum plani, tum partium ejus invenisse. Primum Wrennium curvæ cycloidis æqualem rectam dedisse. Me quoque primum reperisse dimensionem absolutam portionis cycloidis, quæ rectâ, basi parallelâ, abscinditur per punctum axis, quod quarta parte ejus à vertice abest. quæ nimirum portio æquatur dimidio hexagono æquilatere, intra circulum genitorem descripto. Seipsum denique solidorum ac semisolidorum, tam circa basin quàm circa axem, centra gravitatis definivisse, itemque partium eorum. Lineæ etiam ipsius (sed hæc post acceptam à Wrennio dimensionem) centrum gravitatis invenisse, & dimensionem superficierum convexarum, quibus solida ista eorumque partes comprehenduntur; earumque superficierum centra gravitatis. Ac denique dimensionem curvarum cujusvis cycloidis, tam protractæ quam contractæ: hoc est earum quæ describuntur à puncto intra vel extra circumferentiam circuli genitoris sumpto. Et horum quidem demonstrationes à Pâschalio sunt editæ. A quibus suas quoque, de eadem linea, subtilissimas meditationes exposuit Cl. Wallisius, atque eadem illa omnia suo Marte se reperisse, ac problemata à Pâschalio proposita solvisse contendit. Quod idem & doctissimus Lovera sibi vindicat Quantum vero unicuique debeat, ex scriptis eorum eruditi judicent. Nos propterea tantum præcedentia retulimus, quod silentio prætereunda non videbantur egregia adeo inventa, quibus factum est ut, ex lineis omnibus, nulla nunc melius aut penitiùs quam cyclois cognita sit. Methodum vero nostram, qua in hac metienda usi sumus, in aliis quoque experiri libuit, de quibus porro nunc agemus.

P R O P O S I T I O V I I I.

C *Vjus lineæ evolutione parabola describatur ostendere.*

Sit paraboloides AB , cujus axis AD ; vertex A ; proprietas autem ista, ut ordinatim ad axem applicata BD , cubus abscissæ ad verticem DA æquetur solido, basin habenti quadratum DB , altitudinem vero æqualem lineæ cuidam datæ M ; quæ quidem curva pridem geometris nota fuit; & pouatur axi DE juncta in directum AE , quæ habeat $\frac{1}{2}$ ipsius M . Iam si filum continuum circa EAB applicetur, idque ab E evolvi incipiat, dico descri-

ptam ex evolutione esse parabolam EF , cujus axis EAC , vertex E , latus rectum æquale duplæ EA .



Sumpto enim in curva AB puncto quolibet B , ducatur quæ in ipso tangat curvam recta BC , occurrens axi EA in G . & ex G ducatur porro GF , quæ ad rectos angulos occurrat parabolæ EF in F ; & sit ipsi GF perpendicularis FH , quæ parabolam in F continget; & denique FK ordinatim ad axem EG applicetur.

Est igitur KG æqualis dimidio lateri recto, hoc est, ipsi EA ; ac proinde, additâ vel ablatâ utrimque AK , erit EK æqualis AG . Est autem AG triens ipsius AD , quoniam BC tangit paraboloidem in B : illud enim ex natura curvæ hujus facile demonstrari potest. Ergo & EK æqualis est trienti AD : & KH , quæ ex natura parabolæ dupla est KE , æquabitur duabus tertiis AD . Itaque cubus ex KH æqualis est $\frac{8}{27}$ cubi ex AD , hoc est, solido basin habenti quadratum DB , altitudinem vero æqualem $\frac{2}{3}M$, hoc est, ipsi AE . Quamobrem ut quadratum DB ad quadratum KH , ita erit KH longitudine ad AE , hoc est ad KG . Erat autem KH æqualis $\frac{2}{3}AD$, hoc est ipsi GD . Ergo ut quadratum BD ad quadratum DG ita est HK ad KG . Vt autem HK ad KG , ita est quadratum FK ad quadratum KG . Ergo sicut quadratum BD ad quadratum DG , ita quadratum FK ad quadratum KG . Et proinde sicut BD ad DG longitudine, ita FK ad KG . Vnde sequitur BCF esse lineam rectam. Sed GF occurrit parabolæ EF ad angulos rectos. Ergo apparet BC , tangentem paraboloidis, productam occurrere eidem parabolæ ad

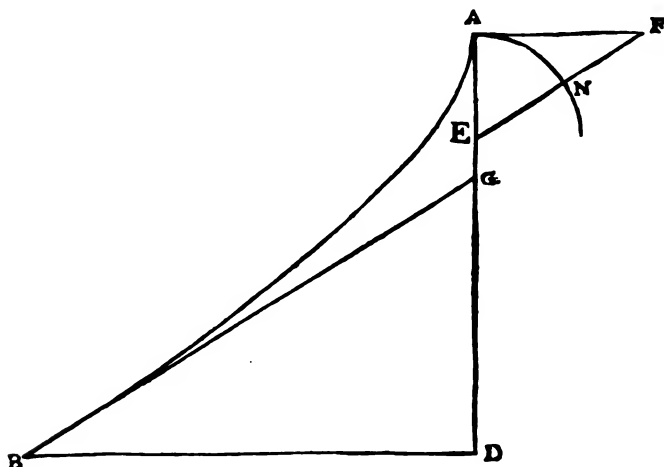
angulos rectos. Idque similiter de quavis illius tangente demonstrabitur. Ergo constat ex evolutione lineæ EAB , à termino E incepta, describi parabolam EF *. quod erat demonstrandum.

DE LINEARUM
CURVARUM
EVOLUTIONE.
* Prop. 4. huj.

PROPOSITIO IX.

Rectam lineam invenire æqualem datae portioni curvæ paraboloidis, ejus nempe in qua quadrata ordinatim applicatarum ad axem, sunt inter se sicut cubi abscissarum ad verticem.

Quomodo hoc fiat ex prop. præcedenti manifestum est. Parabola vero EF ad constructionem non requiritur, quæ sic peragetur. Data quavis parte paraboloidis hujus AB , cui rectam æqualem invenire oporteat, ducatur BG tangens in puncto B , quæ occurrat axi AG in G . Tanget autem si AG fuerit tertia pars AD , inter



verticem & ordinatim applicatam BD interceptæ. Porro sumpta AE æquali $\frac{1}{3}$ lineæ AD , quæ latus rectum est paraboloidis AB , ducatur EF parallela BG , occurratque lineæ AF , quæ parallela est BD , in F . Iam si ad rectam BG addatur GF , excessus rectæ EF supra BA , habebitur recta æqualis curvæ AB . Cujus demonstratio ex ante dictis facile perspicitur.

Semper ergo curva AB tantum superat tangentem BG , quantum recta EF rectam EA .

Rursus autem hic in lineam incidimus, cujus longitudinem alii jam ante dimensi sunt. Illam nempe quam anno 1659 Ioh. Heuratus Harlemensis rectæ æqualem ostendit, cujus demonstratio post commentarios Ioh. Schotenii in Cartesii Geometriam, eodem anno editam, adjecta est. Et ille quidem omnium primus curvam lineam, ex earum numero quarum puncta quælibet geo-

metricè definiuntur, ad hanc mensuram reduxit, cum sub idem tempus Cycloidis longitudinem dedisset Wrennius, non minus ingenioso epicheremate.

Scio equidem, ab edito Heuratii invento, Doctissimum Wallisium Wilhelmo Nelio, nobili apud suos juveni, idem attribuere voluisse, in libro de Cissoide. Sed mihi, quæ illic adfert perpendenti, videtur non multum quidem ab invento illo Nelium abfuisse, neque tamen plane id adsecutum esse. Nam neque ex demonstratione ejus, quam Wallisius affert, apparet illum satis perspexisse quænam foret curva illa, cujus, si construeretur, mensuram datam fore videbat. Et credibile est, si scivisset ex earum numero esse quæ jampridem Geometris cognitæ fuerant, vel ipsum, vel alios ejus nomine, tam nobile inventum Geometris maturius impertituros fuisse, quod, si quod aliud, merebatur ut Archimedeum illud *εὕρημα* exclamarent. Sane ejusdem inventi, tanquam à se profecti, etiam Fermatius, Tholosanus senator ac Geometra peritissimus, demonstrationes conscripsit, quæ anno 1660 excusæ sunt; sed illæ sero utique.

Cum vero in his simus, etiam de nobis dicere liceat, quid ad promovendum tam eximium inventum contulerimus: siquidem & Heuratio ut eo perveniret occasionem præbuimus, & dimensionem curvæ parabolicæ ex hyperbolæ data quadratura, quæ Heuratii inventi pars est, ante ipsum atque omnium primi reperimus. Etenim sub finem anni 1657 in hæc duo simul incidimus, curvæ parabolicæ quam dixi dimensionem, & superficiei conoidis parabolici in circulum reductionem. Cumque Schotenio, aliisque item amicorum, per literas indicassemus, duo quædam non vulgaria circa parabolam inventa nobis sese obtulisse, eorumque alterum esse conoidicæ superficiei extensionem in circulum, ille litteras eas cum Heuratio, quo tum familiariter utebatur, communicavit. Huic vero, acutissimi ingenii viro, non difficile fuit intelligere, conoidis istius superficiei affinem esse dimensionem ipsius curvæ parabolicæ. Qua utraque inventa, ulterius inde investigans, in alias istas curvas paraboloides incidit, quibus rectæ æquales absolute inveniuntur.

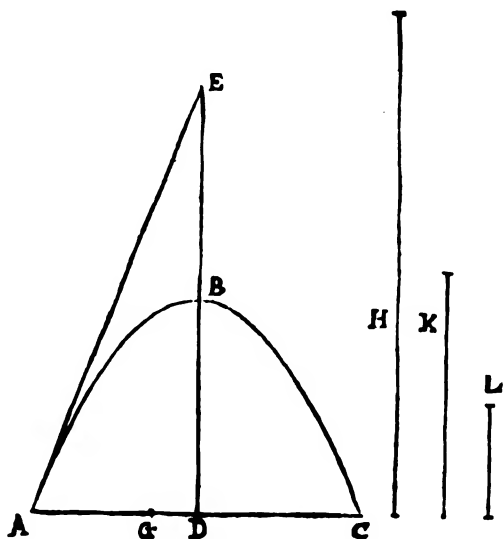
Ac de Conoidis quidem superficiei in planum redacta, ne quis forte testimonium desideret, pauca hæc adscribere visum est ex literis viri clarissimi, atque inter præcipuos hodie Geometras censendi, Franc. Slusii, quibus eo ipso anno mihi inventum illud, ac prolixius forte quam pro merito, gratulatus est. In quibus literis

24. Decemb. anni 1657. datis, ista habentur. *Duo tantum addo, unum* DE LINEARUM
&c. *Alterum est, me has omnes curvas, ipsumque adeo locum linearem in-* CURVARUM
tegrum, nihili pene facere præ invento hoc tuo, quo superficiei in conoide para- EVOLUTIONE.
bolico rationem ad circulum suæ baseos demonstrasti. Hanc pro circuli qua-
dratura pulcherrimam ἀπαγωγήν præfero libens iis omnibus, quas ex loco li-
neari nec paucas olim deduxi, & quas tecum, si ita jusseris, data occasione
communicabo.

Anno autem insequenti etiam superficies conoidum hyperbolicorum & sphæroidum reperi, quomodo ad circulos reduci possent, constructionesque eorum problematum, non addita tamen demonstratione, Geometris quibuscum tunc litterarum commercium habebam, in Gallia Paschalio aliisque, in Anglia Wallisio impertii, qui non multo post sua quoque super his, una cum aliis multis subtilibus inventis in lucem edidit, fecitque ut nostris demonstrationibus perficiendis superfederem. Quoniam vero non inelegantes visæ sunt constructiones nostræ, neque adhuc publice extant, placet hoc loco illas adscribere.

Conoidis parabolici superficiei curva circulum æqualem invenire.

Sit datum conoides cujus sectio per axem parabola $A B C$; axis ejus $B D$, vertex B , diameter basis $A C$, qui sit axi $B D$ ad an-



gulos rectos. Et oporteat superficiei portionis curvæ invenire circulum æqualem.

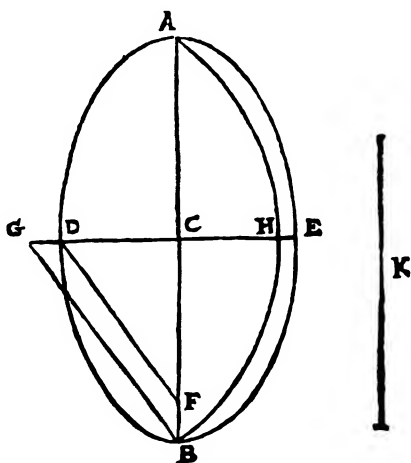
K

Producto axe à parte verticis, fumatur BE æqualis BD , & jungatur EA , quæ parabolam ABC in A continget. Porro secetur AD in G , ut sit AG ad GD sicut EA ad AD . Et utrisque simul AE , DG æqualis statuatur recta H . Item trienti basis AC æqualis sit recta L , & inter H & L media proportionalis inveniatur K . qua tanquam radio circulus describatur. Is æqualis erit superficiei curvæ conoidis ABC . Hinc sequitur, si fuerit AE dupla AD , superficiem conoidis curvam ad circulum baseos fore ut 14 ad 9. Si AE tripla AD , ut 13 ad 6. si AE quadrupla AD , ut 14 ad 5. Atque ita semper fore ut numerus ad numerum, si AE ad AD ejusmodi rationem habuerit.

Sphæroidis oblongi superficiei circulum æqualem invenire.

E Sto sphæroides oblongum cujus axis AB , centrum C , sectio per axem ellipsis $ADB E$, cujus minor diameter DE .

Ponatur DF æqualis CB , seu ponatur F alter focorum ellipseos $ADB E$, rectæque FD parallela ducatur BG , occurrens productæ



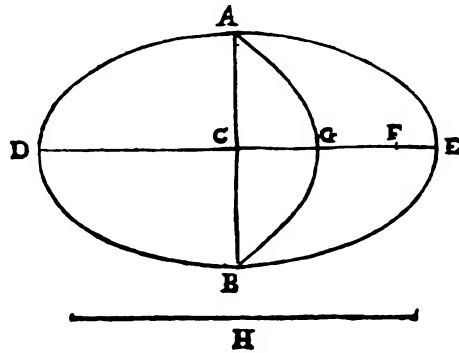
ED in G . centroque G , radio GB , describatur super axe AB arcus circumferentiæ BHA . Interque semidiametrum CD & rectam utrisque æqualem, arcui AHB & diametro DE , media proportionalis sit recta K . Erit hæc radius circuli qui superficiei sphæroidis $ADB E$ æqualis sit.



*Sphaeroidis lati sive compressi superficiei circulum
aequalem invenire.*

Sit sphaeroides latum cujus axis AB , centrum C , sectio per axem ellipsis $ADB E$.

Sit rursus focorum alteruter F , divisâque bifariam FC in G , intelligatur parabola AGB quæ basin habeat axem AB , verticem



vero punctum G . Sitque inter diametrum DE , & rectam curvæ parabolicæ AGB æqualem, media proportionalis linea H . Erit hæc radius circuli qui superficiei sphaeroidis propositi æqualis sit.

*Conoidis hyperbolici superficiei curva circulum
aequalem invenire.*

Esto conoides hyperbolicum cujus axis AB , sectio per axem hyperbola CAD , cujus latus transversum EA , centrum F , latus rectum AG .

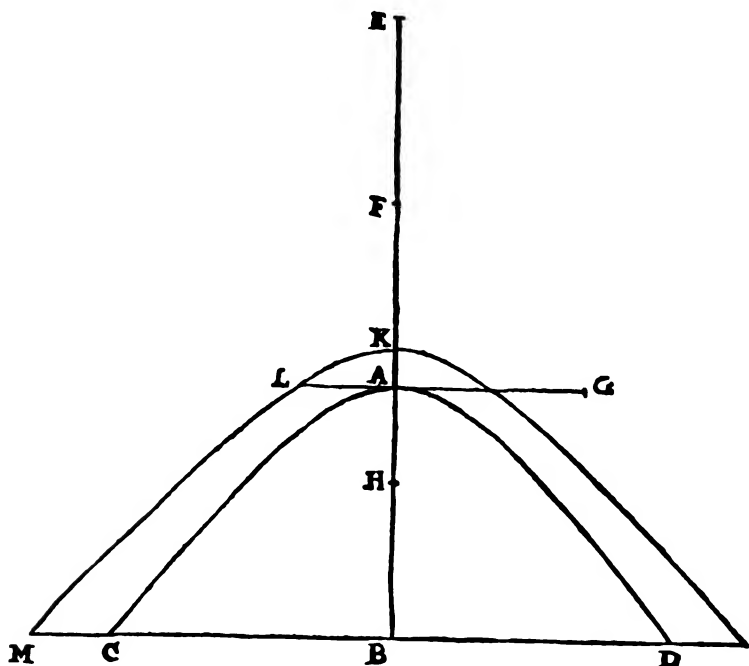
Sumatur in axe recta AH , æqualis dimidio lateri recto AG . & ut HF ad AF longitudine ita, sit AF ad FK potentiâ. Et intelligatur vertice K alia hyperbola descripta KLM , eodem axe & centro F cum priore, quæque latera rectum & transversum illi reciprocè proportionalia habeat. Occurrat autem ipsi producta BC in M , sitque AL parallela BC . Erit jam sicut spatium $ALMB$, tribus rectis lineis & curva hyperbolica comprehensum, ad dimidium quadratum ex BC , ita superficies conoidis curva ad circulum bascos suæ, cujus diameter CD . Vnde constructio reliqua facile absolvetur, positâ hyperbolæ quadraturâ

Quum igitur conoidis parabolici superficiei ad circulum redigatur, æque ac superficies sphaeræ, ex notis geometriæ regulis; in superficiei sphaeroidis oblongi, ut idem fiat, ponendum est arcus

K ij

circumferentiæ longitudinem æquari posse lineæ rectæ. Ad sphæroidis vero lati, itemque ad conoidis hyperbolici superficiem eadem ratione complanandam, hyperbolæ quadratura requiritur. Nam parabolicæ lineæ longitudo, quam in sphæroide hoc adhibuimus, pendet à quadratura hyperbolæ, ut mox ostendemus.

Verum, quod non indignum animadversione videtur, invenimus absque ulla hyperbolicæ quadraturæ suppositione, circulum æqualem construi superficiei utrique simul, sphæroidis lati & conoidis hyperbolici.



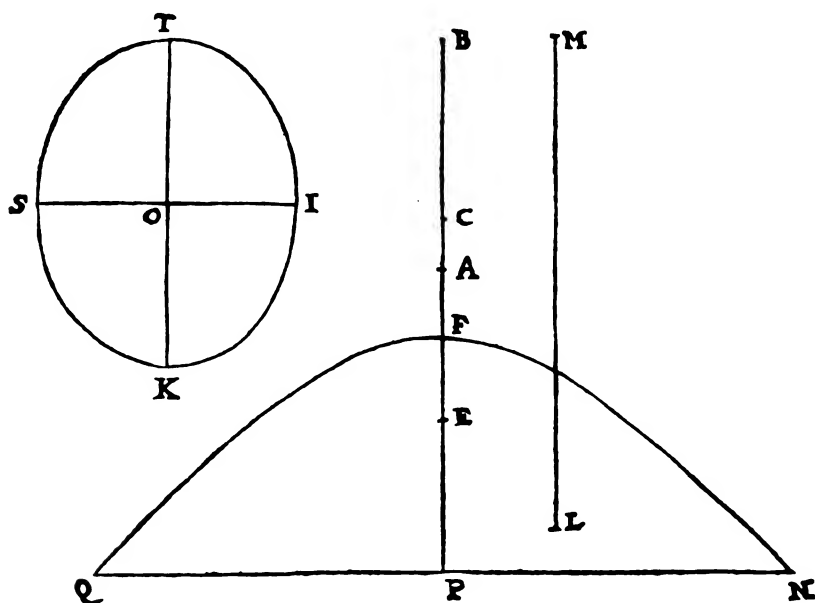
Dato enim sphæroide quovis lato, posse inveniri conoides hyperbolicum, vel contra, dato conoide hyperbolico, posse inveniri sphæroides latum ejusmodi, ut utriusque simul superficiei exhibeatur circulus æqualis. cujus exemplum in casu uno cæteris simpliciore sufficiet attulisse.

Sit sphæroides latum cujus axis s i, sectio per axem ellipsis s t i k; cujus ellipsis centrum o, axis major t k. ponatur autem ellipsis hæc ejusmodi, ut latus tranversum t k habeat ad latus rectum eam rationem, quam linea secundum extremam & mediam rationem secta, ad partem sui majorem.

Sumatur b c potentia dupla ad s o, item b a potentia dupla ad o k. & sint hæ quatuor continue proportionales b c, b a, b f,

B E, & ponatur E P æqualis E A. Intelligatur jam conoides hyperbolicum Q F N, cujus axis F P; axi adjecta, sive $\frac{1}{2}$ latus transversum F B; dimidium latus rectum æquale B C.

DE LINEARUM
CURVARUM
EVOLUTIONE.



Hujus conoidis superficies curva, unà cum superficie sphæroidis S I, æquabitur circulo cujus datus erit radius M L, qui nempe possit quadratum T K cum duplo quadrato S I.

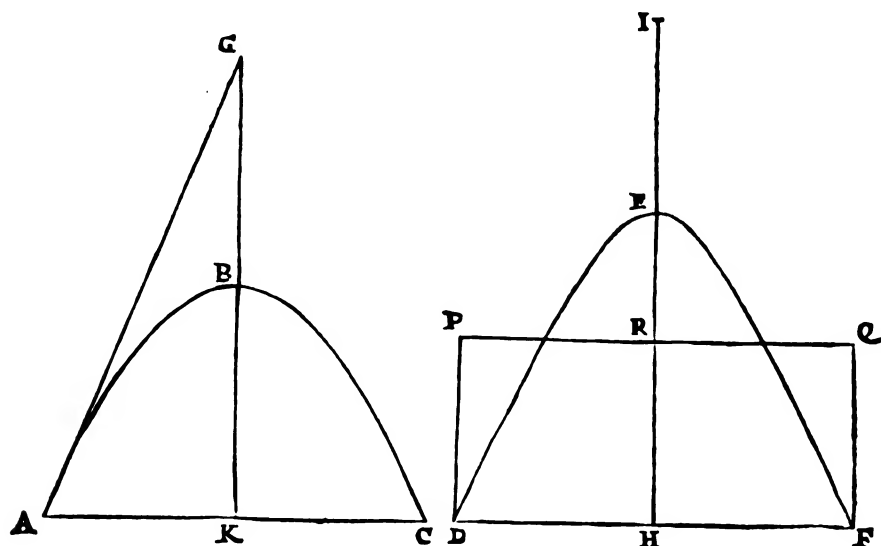
Curva parabolica æqualem rectam lineam invenire.

Sit parabolæ portio A B C, cujus axis B K, basis A C axi ad angulos rectos; & oporteat curvæ A B C rectam æqualem invenire.

Accipiatur basi dimidiæ A K æqualis recta I E, quæ producatur ad H, ut sit I H æqualis A G, quæ parabolam in puncto basis A contingens, cum axe producto convenit in G. Sit jam portio hyperbolæ D E F, vertice E, centro I descriptæ, cujusque diameter sit E H; basis vero D H F ordinatim ad diametrum applicata. Latus rectum pro lubitu sumi potest. Quod si jam super basi D F intelligatur parallelogrammum constitutum D P Q F, quod portioni D E F æquale sit; ejus latus P Q ita secabit diametrum hyperbolæ in R, ut R I sit æqualis curvæ parabolæ A B, cujus dupla est A B C.

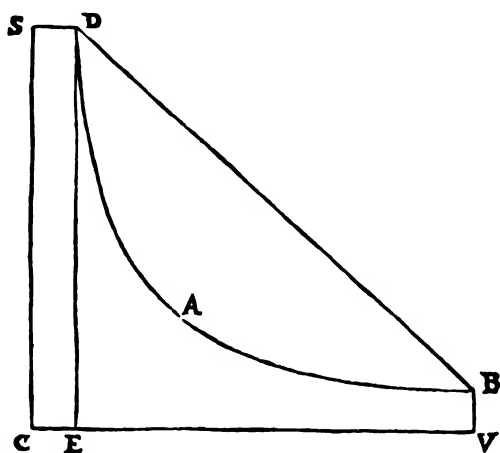
Apparet igitur hinc quomodo à quadratura hyperbolæ pendeat curvæ parabolæ mensura, & illa ab hac vicissim.

Quæcunque vero problemata ad alterum è duobus hisce reducuntur, quamlibet veræ proximam solutionem per numeros ac-



cipiunt, logarithmorum admirabili invento. Cum per hos hyperbolæ quadratura, ut olim invenimus, numeris quam proxime explicetur. Est autem regula hujusmodi.

Sit $DA B$ portio hyperbolæ, cujus asymptoti CS, CV , ductis DE, BV parallelis asymptoto SC .



Accipiatur differentia logarithmorum qui conveniunt numeris, eandem inter se rationem habentibus quam rectæ DE, BV ; ejusque differentiæ quærat logarithmus. Cui addatur logarith-

mus hic (qui semper est idem) 0,36221, 56887. Summa erit logarithmus numeri qui spatium $DEVBAD$ designabit, tribus rectis & curva DAB comprehensi, in partibus qualium parallelogrammum DC est 100000, 00000. Vnde porro facile quoque habebitur area portionis DAB .

Sit ex. gr. proportio DE ad BV ea quæ 36 ad 5.

Ab 1, 55630, 25008, $\log^{\text{ar.}}$ 36.
auferatur 0,69897, 00043. $\log^{\text{ar.}}$ 5.

Erit 0, 85733, 14965. differ. $\log^{\text{ar.}}$.

Et 9, 93314, 92856. $\log^{\text{ar.}}$ differentiæ.

Cui addatur 0,36221, 56887. $\log^{\text{ar.}}$ semper addendus.

Fit 10, 29536, 49743. $\log^{\text{ar.}}$ spatii $DEVBAD$.

Habebit hujus logarithmi numerus 11 characteres, quum characteristica sit 10. Quæratum itaque primo numerus proxime minor, conveniens invento logarithmo, qui numerus est 19740. Deinde ex differentia logarithmi ejusdem, & proxime eum in tabula sequentis, reliqui characteres eliciantur 81026, scribendi post priores, ut fiat 197408, 10260, addito ad finem zero, ut efficiatur numerus characterum 11. Est ergo area spatii $DEVBAD$ proxime partium 197408, 10260, qualium partium parallelogrammum DC est 100000, 00000.

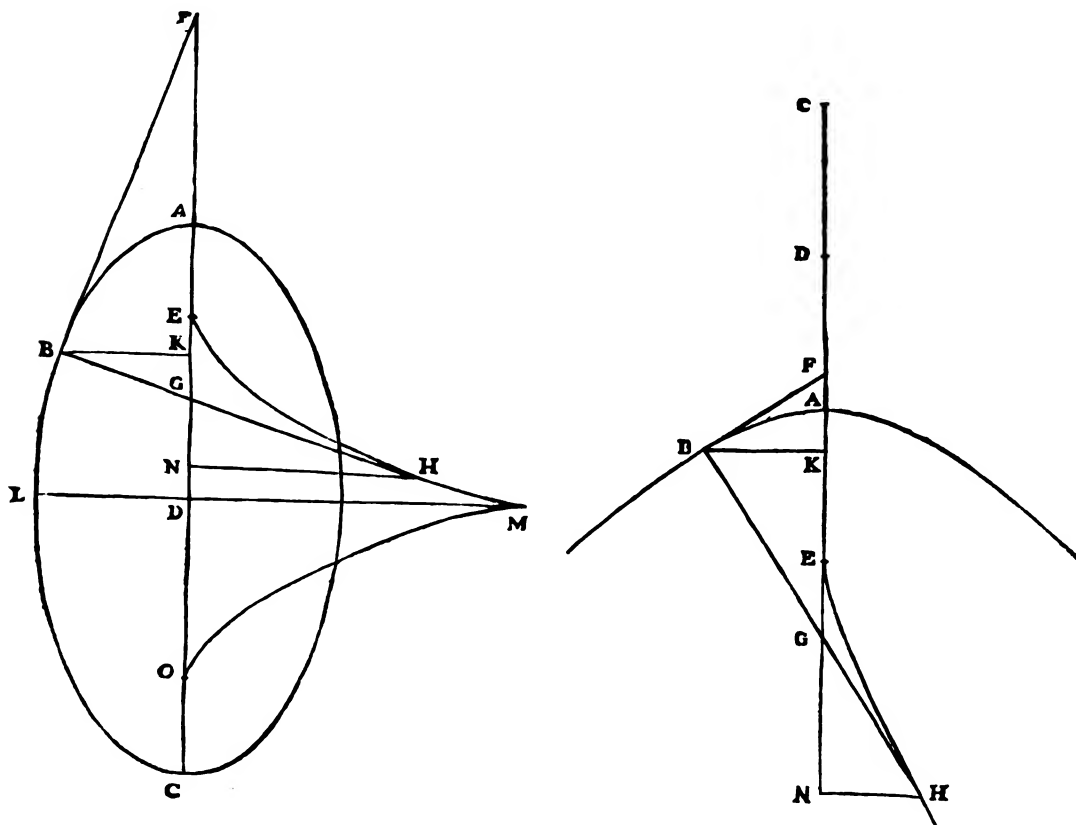
PROPOSITIO X.

L In eas curvas exhibere quarum evolutione ellipses & hyperbola describantur, rectasque invenire iisdem curvis aquales.

Sit ellipsis vel hyperbole quælibet AB , cujus axis transversus AC ; centrum figuræ D ; latus rectum duplum ipsius AE . Et sumpto in sectione quovis puncto, ut B , applicetur ordinatim ad axem recta BK , & ad dictum punctum B tangens ducatur quæ conveniat cum axe in F ; sitque BC ipsi FB perpendicularis, axique occurrat in G ; & producat BC usque ad H , ut BH ad HC habeat rationem eam quæ componitur ex rationibus GF ad FK , & AD ad DE .

Dico curvam EHM , cujus puncta omnia inveniuntur eodem modo quo punctum H , esse eam cujus evolutione, unâ cum recta EA , describetur sectio AB . Ipsam autem BH tangere curvam in

H , & esse toti HEA æqualem. Quamobrem, si ab H B auferatur EA , reliqua recta portioni curvæ HE æquabitur. Apparet autem, cum curvæ puncta quævis indifferenter, certaue ratione inveniantur, esse eam utrobique ex earum genere, quæ merè geometricæ censentur. Vnde & relatio horum omnium punctorum ad puncta axis AC , æquatione aliqua exprimi poterit, quam æquationem ad sextam dimensionem ascendere invenio; minimumque habere ter-



minorum, si fuerit AB hyperbola cujus latera transversum rectumque æqualia. Tunc enim ducta ex quovis curvæ puncto, ut H , ad axem CA perpendiculari HN ; vocatâque AC , a ; CN , x ; & NH , y ; erit semper cubus ab $xx-yy-aa$ æqualis $27xyyaa$. Sed hoc casu brevius quoque multo, quam prædicta constructione, curvæ EHM puncta reperiri possunt, ut in sequentibus ostenderetur.

Cæterum notandum est, in ellipsi singulos quadrantes singularem linearum evolutione describi; sicut quadrans ABL evolutione lineæ AEM , quadrans CL evolutione similis huic oppositæ COM . Est enim hæc in sectione utraque diversitas, quod cum principium quidem curvæ EHM , tam in ellipsi quam in hyperbola, sit punctum E , sumpta AE æquali lateris recti; in hyperbola in infinitum inde dicta linea extenditur, at in ellipsi finitur
in

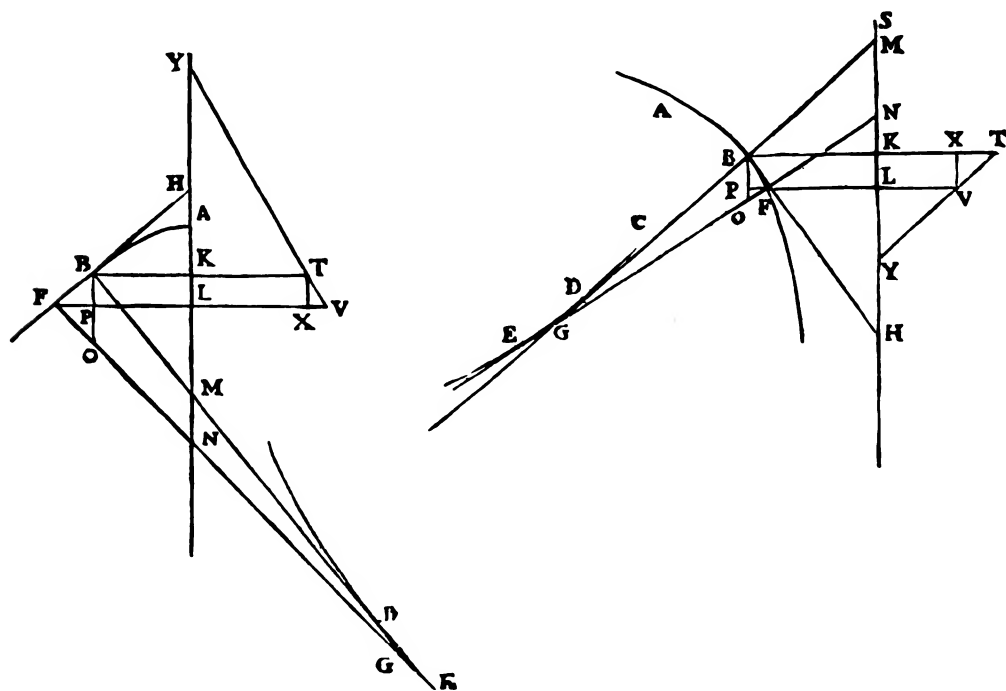
in puncto axis minoris M , sumpta LM æquali $\frac{1}{2}$ lateris recti, secundum quod possunt ordinatim applicatæ ad dictum minorem axem. Namque hos terminos esse hujus curvæ, facile apparebit ortum ejus consideranti, quodque in ellipsi est sicut AD ad DE , ita LM ad MD .

Horum autem demonstrationi non immorabimur, sed ad ipsam methodum tradendam pergemus, qua & hæ curvæ ex sectionibus conicis, & aliæ innumeræ ex aliis quibuscunque datis inveniuntur.

PROPOSITIO XI.

D Atâ lineâ curvâ, invenire aliam cujus evolutione illa describatur; & ostendere quod ex unaquaque curva geometrica, alia curva itidem geometrica existat, cui recta linea aequalis dari possit.

Sit curva quæpiam, vel pars ejus, in partem unam inflexa ABF , & recta KL , ad quam puncta omnia referantur; & oporteat invenire curvam aliam, ut DE , cujus evolutione ipsa ABF describatur.



Ponatur jam inventa; & quoniam tangentes omnes curvæ DE , necesse est occurrere lineæ ABF , ex evolutione descriptæ, ad angulos rectos; patet quoque vicissim eas quæ ipsi ABF ad rectos angulos insistant, ut BD , FE , tacturas evolutam CDE .

L

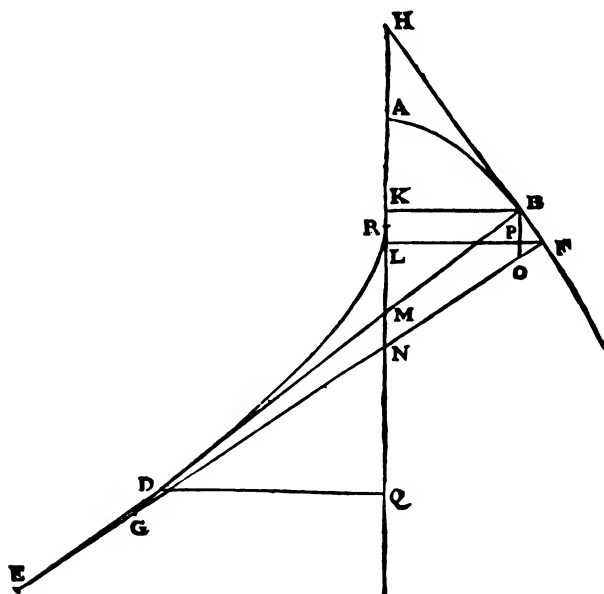
Intelligentur autem puncta B, F , inter se proxima; & si quidem à parte A evolutio incipere ponatur, ulteriusque inde distet F quam B , etiam contactus E ulterius quam D distabit ab A ; intersectio vero rectarum BD, FE , quæ est G , cadet ultra punctum D in recta BD . Nam concurrere ipsas BD, FE necesse est, cum curvæ B, F ad partem cavam insistant rectis angulis.

Quanto autem punctum F ipsi B propinquius fuerit, tanto propius quoque puncta D, G & E convenire apparet; ideoque, si interstitium BF infinite parvum intelligatur, tria dicta puncta pro uno eodemque erunt habenda; ac præterea, ductâ rectâ BH , quæ curvam in B tangat, eadem quoque pro tangente in F censebitur. Sit BO parallela KL , & in hanc perpendiculares cadant BK, FL : secetque FL rectam BO in P , & sint puncta notata M, N , in quibus rectæ, BD, FE , occurrant ipsi KL . Quia igitur ratio BG ad GM est eadem quæ BO ad MN , data hac dabitur & illa; & quia recta BM datur magnitudine ac positione, dabitur & punctum G in producta BM , sive D in curva CDE , quia C & D in unum convenire diximus. Datur autem ratio BO ad MN ; simpliciter quidem in Cycloide, ubi primùm omnium illam investigavimus, invenimusque duplam; in aliis vero curvis, quas hætenus examinavimus, per duarum datarum rationum compositionem. Nam quia ratio BO ad MN componitur ex rationibus BO ad BP , sive NH ad LH , & ex BP sive KL ad MN ; patet si rationes hæ utraq; dentur, etiam ex iis compositam rationem BO ad MN datum iri. Illas vero dari in omnibus curvis geometricis, in sequentibus patebit; ac proinde iis semper curvas assignari posse, quarum evolutione describantur, quæque ideo ad rectas lineas sint reducibiles.

Ponatur primò parabola esse ABF , cujus vertex A , axis AQ . Cum igitur lineæ BM, FN , sint parabolæ ad angulos rectos; ductæque sint ad axem AQ perpendiculares BK, FL , erunt, ex proprietate parabolæ, singulæ MK, NL dimidio lateri recto æquales; & ablata communi LM , æquales inter se KL, MN . Hinc, quum ratio BG ad GM componatur ex rationibus NH ad LH , & KL ad MN , uti dictum fuit, sitque earum posterior ratio æqualitatis; liquet rationem BG ad GM fore eandem quæ NH ad LH ; & dividendo, BM ad MG , eandem quæ NL ad LH , sive MK ad KH ; nam LH, KH pro eadem habentur, propter propinquitatem punctorum B, F . Data autem est ratio MK ad KH , dato puncto B ; quoniam tam MK , quam KH dantur magnitudine; nam MK æquatur dimidio lateri recto, KH vero duplæ KA . Dataque etiam est positio & magni-

rudine recta $B M$. Ergo & $M G$ data erit, adeoque & punctum G ,
 five D , in curva $R D E$; quod nempe invenitur productâ $B M$ usque
 in G , ut sit $B M$ ad $M G$ sicut $\frac{1}{2}$ lateris recti ad duplam $K A$.

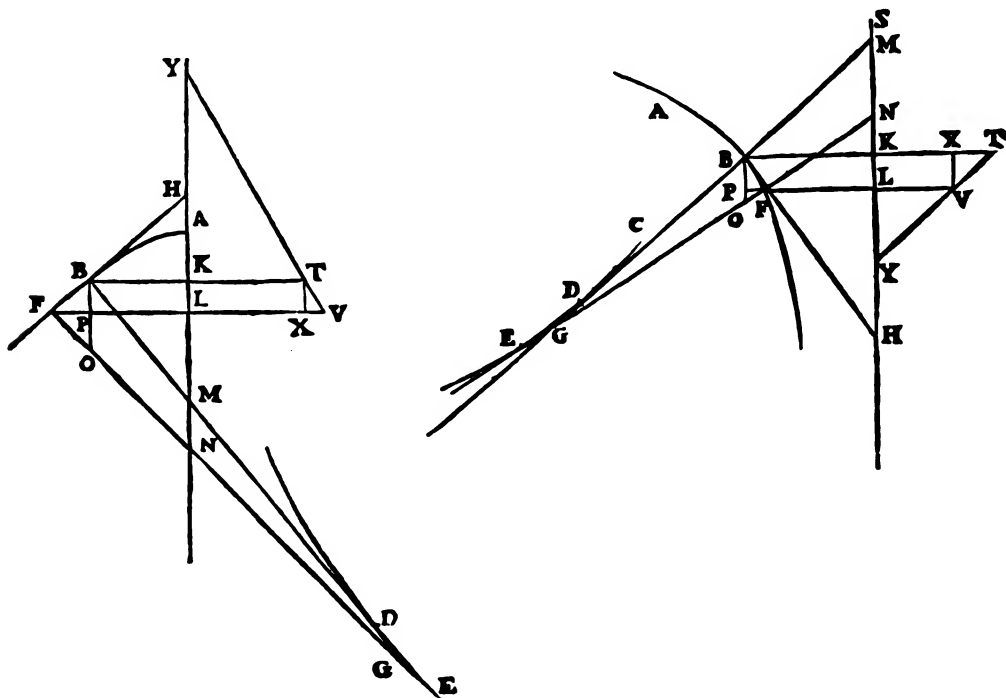
DE LINEARUM
CURVARUM
EVOLUTIONE.



Et sic quidem, adsumptis in parabola ABF aliis quotlibet punctis præter B , totidem quoque puncta lineæ RDE , simili ratione, invenientur; atque hoc ipso lineam RDE geometricam esse constat, unâque proprietas ejus innotescit, ex qua cæteræ deduci possunt. Vt si inquirere deinde velimus, quam æquatione exprimitur relatio punctorum omnium curvæ CDE ad rectam AQ : ducta in hanc perpendiculari DQ , vocatoque latere recto parabolæ ABF , a ; AK , b ; AQ , x ; QD , y . Quoniam ratio $B M$ ad $M D$, hoc est, $K M$ ad $M Q$, est ea quæ $\frac{1}{2} a$ ad $\frac{1}{2} b$, estque ipsa $K M \propto \frac{1}{2} a$, erit & $M Q$ æqualis $\frac{1}{2} b$. Est autem $MA \propto \frac{1}{2} a + b$. ergo AQ sive x æqualis $\frac{1}{2} b + \frac{1}{2} a$. Vnde $b \propto \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} a$. Porro quoniam, sicut quadratum $M K$, hoc est, $\frac{1}{4} a a$ ad quadratum $K B$, hoc est, $a b$, ita qu. $M Q$, hoc est, $\frac{1}{4} b b$ ad qu. $Q D$; erit qu. $Q D$, sive $y y \propto \frac{16}{16}$. Vbi, si in locum b substituat^{ur} $\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} a$, quod illi æquale inventum est, fiet $y y \propto 16 \text{ cub. } \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} a$ divisus per a . Ac proinde $\frac{7}{16} a y y \propto \text{cubo ab } x - \frac{1}{2} a$. Accipiat^{ur} AR in axe parabolæ $\propto \frac{1}{2} a$; eritque $RQ \propto x - \frac{1}{2} a$. Curvam igitur CDE ejus naturæ esse liquet, ut semper cubus lineæ RQ æquetur parallelepipedo, cujus basis qu. QD , altitudo $\frac{7}{16} a$; ac proinde ipsam paraboloidem esse, cujus evolutione describi parabolam AB supra ostendimus; cujus nimirum paraboloidis latus rectum æquetur $\frac{7}{16}$ lateris recti parabolæ AB . tunc enim hujus latus rectum æquale fit $\frac{16}{17}$ lateris recti paraboloidis, quemadmodum ibi fuit definitum.

L ij

Quomodo porro ratio OB ad BP , five NH ad HL , non tantum cum ABF parabola est, sed etiam alia quælibet curva geometrica, semper inveniri possit manifestum est. Quoniam tantum recta FH ducenda est, quæ curvam in adsumpto puncto F tangat, & FN ipsi FH perpendicularis: unde NH & HL datæ erunt, ac proinde ratio quoque earum data.



At non æque liquet quo pacto ratio KL ad MN innotescat, quam tamen semper quoque reperiri posse sic ostendemus.

Sint rectæ KT, LV , perpendiculares super KL , sitque KT æqualis KM , & LV æqualis LN , & ducatur VX parallela LN , quæ occurrat ipsi KT in X . Quoniam ergo semper eadem est differentia duarum LK, NM , quæ duarum LN, KM , hoc est, quæ duarum LV, KT ; est autem differentia ipsarum LV, KT æqualis XT , & XV ipsi LK ; erit proinde NM æqualis duabus simul VX, XT , vel ei quo VX ipsam XT superat. Atque adeo, si data fuerit ratio VX ad XT , data quoque erit ratio VX ad utramque simul VX, XT , vel ad excessum VX supra XT , hoc est, data erit ratio VX five LK ad NM .

Sciendum est autem, quoniam KT ipsi KM , & LV ipsi LN , æquales sumptæ sunt, locum punctorum T, V , fore lineam quandam vel rectam vel curvam datam, ut mox ostenderetur. Et siquidem sit linea recta; ut contingit si ABF coni sectio fuerit, & KL axis ejus; constat rationem VX ad XT datam fore, data positione ipsius lineæ VT , quæ locus est punctorum V, T ; semperque ean-

dem tunc haberi dictam rationem, qualecunque fuerit intervallum KL .

DE LINEARUM
CURVARUM
EVOLUTIONE.

At si locus alia linea curva fuerit, diversa erit ratio v x ad x t , prout majus minusve fuerit intervallum KL . Inquirendum est autem quænam futura sit ista ratio, cum KL infinite parvum imaginamur, quoniam & puncta B , F , proxima invicem posuimus. Similiter itaque & puncta v , t , lineæ curvæ minimam particulam intercipere intelligendum est; unde recta vt , cum ea quæ in t curvam contingit, coincidet. Sit ergo tangens illa ty ; potest enim duci quoniam curva, ad quam sunt puncta t , v , geometrica est. Ratio igitur y K ad K T data erit, adeoque & v x ad x t . ex qua etiam rationem L K ad N M dari ostendimus.

Quænam vero sit lineæ ad quam sunt puncta t , v , invenitur ponendo certum punctum s in recta KL , & vocando s K , x ; K T , y . Nam quia data est curva ABF , eique B M ad angulos rectos ducta, invenietur inde quantitas lineæ K M , per methodum tangentium à Cartesio traditam, quæ ipsi K T , sive y æquabitur, & ex ea æquatione, natura curvæ t v innotescet, ad quam deinde tangens ducenda est. Sed clariora omnia fient sequenti exemplo.

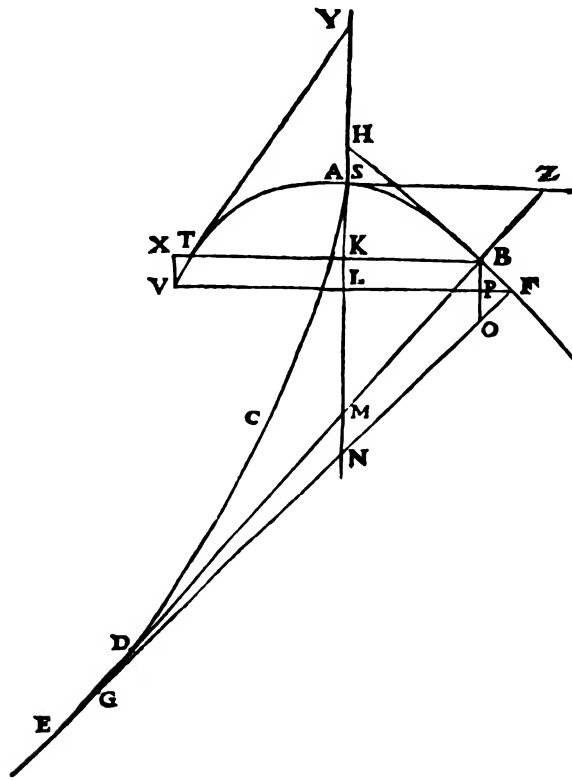
Sit ABF paraboloides illa, cui superius rectam æqualem invenimus; in qua nempe cubi perpendiculararium in rectam s K , sint inter se sicut quadrata ex ipsa s K abscissarum. Et oporteat invenire curvam CDE cujus evolutione paraboloides s B F describatur.

Hic primum ratio B O ad B P facile invenitur, quia tangentem paraboloidis in puncto B duci scimus, sumpta s H æquali $\frac{1}{2}$ s K . Cui tangenti cum B M ad angulos rectos insistat, dantur jam lineæ M H , H K , ac proinde earum inter se ratio, quæ est eadem quæ O B ad B P .

Vt autem ratio B P , sive K L ad M N innotescat, ponantur ad K L perpendiculares rectæ K T , L V , æquales singulis K M , L N , sitque v x parallela L K . Iam quia ex duabus simul K L , L N , auferendo K M , relinquitur M N ; hoc est, auferendo ex duabus x v , v L , sive x v , x K , ipsam K T ; hinc autem relinqui apparet v x & x T : erunt igitur hæ duæ v x , x T ipsi M N æquales, ac proinde ratio K L ad M N eadem quæ v x ad duas simul v x , x T . Vt autem hæc ratio innotescat cum intervallum KL est minimum; oportet secundum prædicta inquirere quis sit locus, sive linea ad quam sunt puncta t , v . Quod ut fiat sit latus rectum paraboloidis ABF $\propto a$; s K $\propto x$; K T $\propto y$.

Quia igitur proportionales sunt K H , K B , K M , estque H K \propto
L iij

$\frac{1}{2} x : \kappa$ b ex natura paraboloidis æqualis R. cub. $a a x \propto y$: fiet $\kappa \mathcal{M}$, hoc est $\kappa \tau \propto \frac{1}{2} R. \text{ cub. } a a x \propto y$, ac proinde $\frac{1}{2} a a x \propto y^3$. Vnde patet locum punctorum τ , v , esse paraboloidem illam, quam cubicam vocant geometræ. Cui proinde ad τ tangens ducetur, sumptâ $s \gamma$ duplâ ipsius $s \kappa$, junctâque $\gamma \tau$. Et jam quidem ratio $v x$ ad duas simul $v x, x \tau$, quam diximus eandem esse ac κL ad $\mathcal{M} N$, erit ea quæ $\gamma \kappa$ ad utramque simul $\gamma \kappa, \kappa \tau$. Hæc autem ratio data est, ergo & ratio κL ad $\mathcal{M} N$. Sed & rationem $o b$ ad $p b$ datam esse ostensum est. Ergo, cum ex duabus hisce componatur ratio $b d$ ad $d \mathcal{M}$, ut supra patuit, dabitur & hæc; & dividendo, ratio $b \mathcal{M}$ ad $\mathcal{M} d$; adeoque & punctum d in curva $d e$.

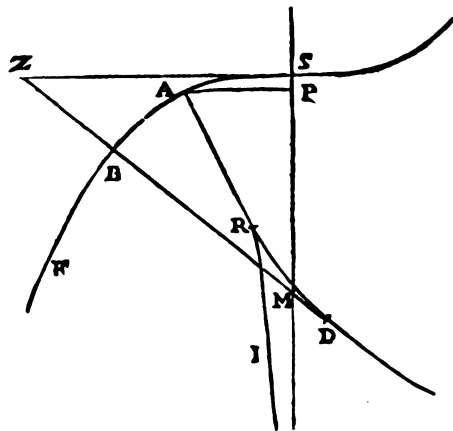


Ad constructionem autem brevissimam hoc pacto hic pervenimus. $\kappa \tau$ sive $\kappa \mu$ dicta fuit y . Itaque $\mu \eta$ erit $y + \frac{1}{3}x$. Et $\mu \eta$ ad $\eta \kappa$, sive $\omicron \nu$ ad $\nu \rho$, ut $y + \frac{1}{3}x$ ad $\frac{1}{3}x$. sive, sumptis omnium duplis, ut $2y + 3x$ ad $3x$. Deinde quia $\gamma \kappa \propto 3x$, erit $\gamma \kappa$ ad $\gamma \kappa + \kappa \tau$, sive per prædicta, $\kappa \lambda$ ad $\mu \eta$, ut $3x$ ad $3x + y$. Atqui ex rationibus $\omicron \nu$ ad $\nu \rho$, & $\kappa \lambda$ ad $\mu \eta$, componi diximus rationem $\nu \delta$ ad $\delta \mu$. Ergo ratio $\nu \delta$ ad $\delta \mu$ erit composita ex rationibus $2y + 3x$ ad $3x$, & $3x$ ad $3x + y$; ideoque erit ea quæ $2y + 3x$ ad $3x + y$. & dividendo, ratio $\nu \delta$ ad $\delta \mu$, eadem quæ y ad $3x + y$.

Sit $s \perp z$ perpendicularis ad $s \in \kappa$, eique occurrat $m \in \text{producta in } z$.

Quia ergo ratio $B M$ ad $M D$ inventa est ea quæ y ad $y + 3x$, hoc est quæ $M K$ ad $M K + 3 K S$. Sicut autem $M K$ ad $M K + 3 K S$, ita $M B$ ad $M B + 3 B Z$: erit proinde $M B$ ad $M D$ ut $M B$ ad $M B + 3 B Z$. Vnde liquet $M D$ æqualem sumendam ipsi $M B + 3 B Z$. Atque ita quolibet puncta curvæ $C D E$ invenire licebit. Cujus curvæ portio quælibet ut $D S$, rectæ $D B$, quæ paraboloidi $S A B$ ad angulos rectos occurrit, æqualis erit. Constat autem geometricam esse, & si velimus, possumus æquatione aliqua relationem exprimere punctorum omnium ipsius ad puncta axis $S K$.

Simili modo autem, si inquiramus in paraboloidi illa sive parabola cubica, in qua cubi ordinatim applicatarum ad axem, sunt inter se sicut portiones axis abscissæ, inveniemus curvam cujus evolutione describitur, quæque proinde rectæ lineæ æquari poterit, nihilo difficiliore constructione per puncta determinari. Nam si fuerit illa $S A B$; axis $S M$; (dicitur autem improprie axis in hac curva, cum forma ejus sit ejusmodi, ut ductâ $S Z$, quæ secet $S M$ ad angulos rectos, ea portiones similes curvæ habeat ad partes oppo-

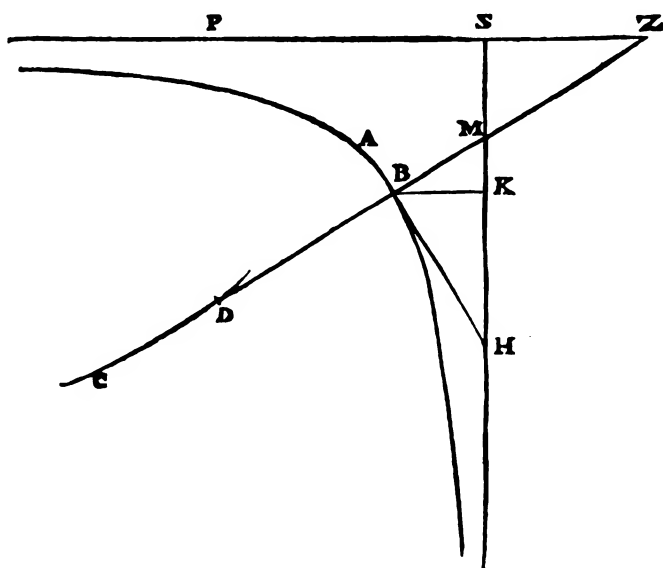


fitas;) agatur per punctum quodlibet B , in paraboloidi sumptum, recta $B D$, quæ curvam ad angulos rectos secet, axique ejus occurrat in M , rectæ vero $S Z$ in Z . Deinde sumatur $F D$ æqualis dimidiæ $B M$, unâ cum sesquialtera $B Z$. Eritque D unum è punctis curvæ quæ sitæ $R D$ vel $R I$, cujus evolutione, juncta tamen recta quadam $R A$, describetur paraboloides $S A B$. Sunt autem hic, quod notatu dignum est, quodque in aliis etiam nonnullis harum paraboloidum contingit, duæ evolutiones in partes contrarias, quarum utraque à puncto certo A initium capit; ita ut evolutione ipsius $A R D$, in infinitum porro continuata, describatur paraboloidis pars infinita $A B F$; evolutione autem totius $F H K$, similiter in infinitum extensæ, tantum particula $A S$. Punctum autem A definitur, sumptâ $S P$ quæ sit ad

in curva quæ sita c d. Exempli gratia, si s b est parabola quæ ex coni sectione fit, ei scimus convenire æquationem tabellæ primæ, $ax \propto y^2$; cui responderet ab altera parte $b m \rightarrow z b z \propto b d$. Vnde longitudo lineæ b d cognoscitur, adeoque inventio quotlibet punctorum curvæ c d. Quam quidem, hoc casu, paraboloidem esse supra demonstratum fuit, eam nempe, cujus æquatio tertia est hujus tabellæ.

Construitur autem tabella hoc pacto, ut $B M$ sumatur multiplex secundum numerum qui est exponens potestatis x in æquatione; $B Z$ vero, multiplex secundum exponentem potestatis y ; ex his autem utrisque compositæ accipiaturs pars denominata ab exponente potestatis a .

Præter hæc autem paraboloides lineas, alias item invenimus, à quibus, non absimili constructione, deducuntur curvæ rectis comparabiles. Assimilantur autem hyperbolis, eo quod asymptotos suas habent, sed tantum angulum rectum constituentes. Et harum primam quidem statuimus hyperbolam ipsam, quæ est è coni sectione.



Reliquarum vero naturam ut explicemus; sunt ps , sk , asymptoti curvæ ab , rectum angulum comprehendentes, & à curvæ puncto quolibet b ducatur bk parallela ps , sitque $sk \propto x$; $kb \propto y$. Si igitur hyperbola sit ab , scimus rectangulum linearum sk , kb , hoc est, rectangulum xy semper eidem quadrato æquale esse, quod vocetur $a a$.

Proxima vero hyperboloidum erit, in qua solidum ex quadrato

lineæ $s\kappa$, in altitudinem κB ductum, hoc est, solidum xxy , cubo certo æquabitur, qui vocetur a^3 . Atque ita innumeræ aliæ hujus generis hyperboloides existunt, quarum proprietatem sequens tabella singulis æquationibus exhibet, simulque rationem construendi curvam DC , cujus evolutione quæque generetur.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} xy \propto a^3 \\ x^2y \propto a^3 \\ xy^2 \propto a^3 \\ x^3y \propto a^4 \\ xy^3 \propto a^4 \end{array} \right. \text{ Erit } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1} BM \rightarrow \frac{1}{1} BZ \\ \frac{1}{2} BM \rightarrow \frac{1}{2} BZ \\ \frac{1}{3} BM \rightarrow \frac{1}{3} BZ \\ \frac{1}{4} BM \rightarrow \frac{1}{4} BZ \\ \frac{1}{4} BM \rightarrow \frac{1}{4} BZ \end{array} \right\} \propto BD.$$

Recta $DBMZ$ curvam AB , ut antea quoque, secat ad angulos rectos, occurritque asymptotis $s\kappa$, sP , in M & Z . Si igitur exempli gratia hyperbola fuerit AB , cujus æquatio est $xy \propto a^3$, sumetur $BD \propto \frac{1}{1} BM \rightarrow \frac{1}{1} BZ$, quemadmodum tabella præcipit. Eritque punctum D in curva DC quæsita, cujus alia quotlibet puncta sic inveniri poterunt, & portio ejus quælibet rectæ lineæ adæquari. Et hæc quidem eadem illa est curva, cujus relationem ad axem hyperbolæ superius æquatione expressimus. Constructio autem tabellæ hujus plane eadem est quæ superioris.

Cæterum, quoniam tum ad harum curvarum, tum ad earum quæ ex paraboloidibus nascuntur constructionem, ducendæ sunt lineæ DBZ , quæ ad datum punctum B secant curvas AB , sive ipsarum tangentes BH , ad angulos rectos; dicemus in universum quomodo hæc tangentes inveniantur. In æquatione itaque, quæ cujusque curvæ naturam explicat, quales æquationes duabus tabellis præcedentibus exponuntur, considerare oportet quæ sint exponentes potestatum x & y , & facere ut, sicut exponentis potestatis x ad exponentem potestatis y , ita sit $s\kappa$ ad κH . Iuncta enim H B curvam in B continget. Velut in tertia hyperboloide, cujus æquatio est $xy^2 \propto a^3$: quia exponentis potestatis x est 1 , potestatis autem y exponentis 2 ; oportet esse ut 1 ad 2 ita $s\kappa$ ad κH . Horum autem demonstrationem noverunt analyticæ artis periti, qui jam pridem omnes has lineas contemplari cœperunt; & non solum paraboloidum istarum, sed & spatiorum quorundam infinitorum, inter hyperboloides & asymptotos interjectorum, plana solidaque dimensi sunt. Quod quidem & nos, facili atque universali methodo, expedire possemus, ex sola tangentium proprietate sumpta demonstratione. Sed illa non sunt hujus loci.





HOROLOGII OSCILLATORII

PARS QUARTA.

De centro Oscillationis.

CEntrorum Oscillationis, seu Agitationis, investigationem olim mihi, fere adhuc puero, aliisque multis, doctissimus Mersennus proposuit, celebre admodum inter illius temporis Geometras problema, prout ex litteris ejus ad me datis colligo, nec non ex Cartesii haud pridem editis, quibus ad Mersennianas super his rebus responsum continetur. Postulabat autem centra illa ut invenirem in circuli sectoribus, tam ab angulo quam à medio arcu suspensis, atque in latus agitaris, item in circuli segmentis, & in triangulis, nunc ex vertice, nunc ex media basi pendentibus Quod eo redit, ut pendulum simplex, hoc est, pondus filo appensum reperiat, ut longitudine, ut oscillationes faciat temporum eorundem ac figuræ istæ, uti dictum est, suspensæ. Simul vero pretium operæ, si forte quæsitis satisfecissem, magnum sane & invidiosum pollicebatur. Sed à nemine id quod desiderabat tunc obtinuit. Nam me quod attinet, cum nihil reperirem quo vel primus aditus ad contemplationem eam pateretur; velut à limine repulsus, longiori investigatione tunc quidem abstinui. Qui vero rem sese confecisse sperabant viri insignes, Cartesius, Honoratus Fabrius, aliique, nequaquam scopum attigerunt, nisi in paucis quibusdam racilioribus, sed quorum tamen demonstrationem nullam idoneam, ut mihi videtur, attulerunt. Idque comparatione eorum quæ hic trademus manifestum fore spero, si quis forte quæ ab illis tradita sunt, cum nostris hisce contulerit; quæ quidem & certioribus principiis demonstrata arbitror, & experimentis prorsus convenientia reperi. Occasio vero ad hæc denuo tentanda, ex pendulorum automati nostri temperandorum ratione oblata est, dum pondus mobile, præter id quod in imo est, illis applico, ut in descriptione horologii fuit explicatum. Hinc melioribus auspiciis atque à prima origine rem exorsus, tandem difficultates omnes superavi, nec tantum problematum Mersennianorum solutionem, sed alia quoque illis difficiliora reperi, &

M ij

viam denique, qua in lineis, superficiebus, solidisque corporibus certa ratione centrum illud investigare liceret. Vnde quidem, præter voluptatem inveniendi quæ multum ab aliis quæsitæ fuerant, cognoscendique in his rebus naturæ leges decretaque, utilitatem quoque eam cepi, cujus gratia primo animum ad hæc applicueram, reperta illa horologii temperandi ratione facili & expedita. Accessit autem hoc quoque, quod pluris faciendum arbitror, ut certæ, sæculisque omnibus duraturæ, mensuræ definitionem absolutissimam per hæc tradere possem; qualis est ea quæ ad finem horum adjecta reperietur.

DEFINITIONES.

I.

Pendulum dicatur figura qualibet gravitate prædita, sive linea fuerit, sive superficies, sive solidum, ita suspensa ut circa punctum aliquod, vel axem potius, qui plano horizontis parallelus intelligitur, motum reciprocum vi gravitatis suæ continuare possit.

II.

Axis ille horizontis plano parallelus, circa quem penduli motus fieri intelligitur, dicatur axis Oscillationis.

III.

Pendulum simplex dicatur quod filo vel linea inflexili, gravitatis experte, constare intelligitur, ima sui parte pondus affixum gerente; cujus ponderis gravitas, velut in unum punctum collecta, censenda est.

IV.

Pendulum verò compositum, quod pluribus ponderibus constat, immutabiles distantias servantibus, tum inter se, tum ab axe Oscillationis. Hinc figura qualibet suspensa, ac gravitate prædita, pendulum compositum dici potest, quatenus cogitatu in partes quotlibet est divisibilis.

V.

Pendula isochrona vocentur, quorum Oscillationes, per arcus similes, aequalibus temporibus peraguntur.

VI.

Planum Oscillationis dicatur illud, quod per centrum gravitatis figura suspensa duci intelligitur, ad axem oscillationis rectum.

DE CENTRO
OSCILLA-
TIONIS.

VII.

Linea centri, recta qua per centrum gravitatis figura ducitur, ad axem oscillationis perpendicularis.

VIII.

Linea perpendiculi, recta in plano oscillationis, ducta ab axe oscillationis, ad horizontis planum perpendicularis.

IX.

Centrum oscillationis vel agitationis figura cujuslibet, dicatur punctum in linea centri, tantum ab axe oscillationis distans, quanta est longitudo penduli simplicis quod figura isochronum sit.

X.

Axis gravitatis, linea quavis recta, per centrum gravitatis figura transiens.

XI.

Figura plana, vel linea in plano sita, in planum agitari dicatur, cum axis oscillationis in eodem cum figura lineave est plano.

XII.

Eadem vero in latus agitari dicantur, cum axis oscillationis ad figura lineave planum rectus est.

XIII.

Quando pondera in rectas lineas duci dicentur, id ita est intelligendum, ac si numeri lineave, quantitates ponderum rationemque inter se mutuam exprimentes, ita ducantur.

HYPOTHESES.

I.

S*I pondera quotlibet, vi gravitatis sua, moveri incipiant; non posse centrum gravitatis ex ipsis composita altius, quam ubi incipiente motu reperiebatur, ascendere.*

M iij

Altitudo autem in his secundum distantiam à plano horizontali consideratur, graviaque ponuntur ad hoc planum, secundum rectas ipsi perpendiculares, descendere conari. Quod idem ab omnibus, qui de centro gravitatis egerunt, vel ponitur expresse, vel à legentibus supplendum est, cum absque eo centri gravitatis consideratio locum non habeat.

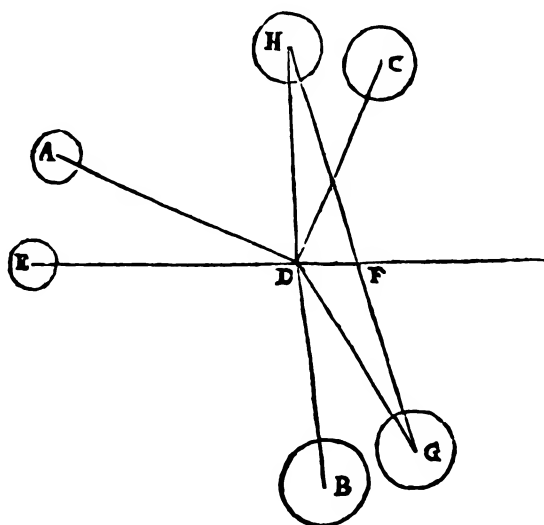
Ipsa vero hypothesis nostra quominus scrupulum moveat, nihil aliud sibi velle eam ostendemus, quam quod nemo unquam negavit, gravia nempe sursum non ferri. Nam primo, si unum quodpiam corpus grave proponamus, illud vi gravitatis suæ altius ascendere non posse extra dubium est. ascendere autem tunc intelligitur scilicet, cum ejus centrum gravitatis ascendit. Sed & idem de quotlibet ponderibus, inter se per lineas inflexiles conjunctis, concedi necesse est, quoniam nihil vetat ipsa tanquam unum aliquod considerari. Itaque neque horum commune gravitatis centrum ultro ascendere poterit.

Quod si jam pondera quotlibet non inter se connexa ponantur, illorum quoque aliquod commune centrum gravitatis esse scimus. Cujus quidem centri quanta erit altitudo, tantam ajo & gravitatis ex omnibus compositæ altitudinem censeri debere; siquidem omnia ad eandem illam centri gravitatis altitudinem deduci possunt, nullâ aliâ accersitâ potentiâ quam quæ ipsis ponderibus inest, sed tantum lineis inflexilibus ea pro lubitu jungendo, ac circa gravitatis centrum movendo; ad quod nulla vi neque potentia determinata opus est. Quare, sicut fieri non potest ut pondera quædam, in plano eodem horizontali posita, supra illud planum, vi gravitatis suæ, omnia æqualiter attollantur; ita nec quorumlibet ponderum, quomodocunque dispositorum, centrum gravitatis ad majorem quam habet altitudinem pervenire poterit. Quod autem diximus pondera quælibet, nulla adhibita vi, ad planum horizontale, per centrum commune gravitatis eorum transiens, perduciposse, sic ostendetur.

Sint pondera A, B, C , positione data, quorum commune gravitatis centrum sit D . per quod planum horizontale ductum ponatur, cujus sectio recta EF . Sint jam lineæ inflexiles DA, DB, DC , quæ pondera sibi invariabiliter connectant; quæ porro moveantur, donec A sit in plano EF ad E . Virgis vero omnibus per æquales angulos delatis, erunt jam B in G , & C in H .

Rursus jam B & C connecti intelligantur virgâ HG , quæ secet planum EF in F ; ubi necessario quoque erit centrum gravitatis bino-

rum istorum ponderum connexorum, cum trium, in E, B, H, positorum, centrum gravitatis sit D, & ejus quod est in E, centrum gravitatis sit quoque in plano E D F. Moventur igitur rursus pondera H, G, super puncto F, velut axe, absque vi ulla, ac simul utraque ad planum E F adducuntur, adeo ut jam tria, quæ prius erant in A, B, C, ad ipsam sui centri gravitatis D altitudinem, suo ipsorum æquilibrio, translata appareat. quod erat ostendendum. Eademque de quocunque aliis est demonstratio.



Hæc autem hypothesis nostra ad liquida etiam corpora valet, ac per eam non solum omnia illa, quæ de innatantibus habet Archimedes, demonstrari possunt, sed & alia pleraque Mechanicæ theoremata. Et sanè, si hac eadem uti scirent novorum operum machinatores, qui motum perpetuum irritò conari moliuntur, facile suos ipsi errores deprehenderent, intelligerentque rem eam mechanica ratione haud quaquam possibilem esse.

II.

Remoto aëris, alioque omni impedimento manifesto, quemadmodum in sequentibus demonstrationibus id intelligi volumus, centrum gravitatis penduli agitati, aequales arcus descendendo ac ascendendo percurrere.

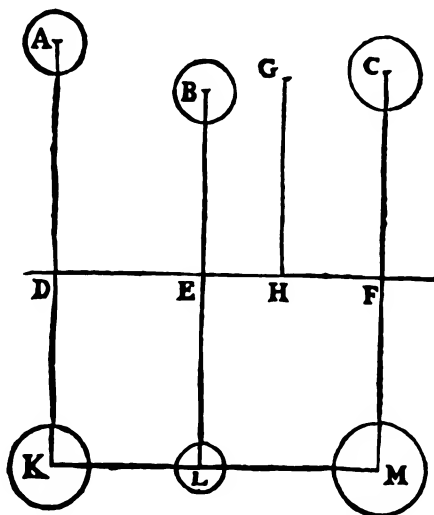
De pendulo simplici hoc demonstratum est propositione 9 de Descensu gravium. Idem vero & de composito tenendum esse declarat experientia; si quidem, quæcunque fuerit penduli figura,

æque apta continuando motui reperitur, nisi in quantum plus minusve aëris objectu impeditur.

PROPOSITIO I.

Ponderibus quotlibet ad eandem partem plani existentibus, si à singulorum centrīs gravitatis agantur in planum illud perpendiculares; hæ singula in sua pondera ducta, tantundem simul efficient, ac perpendicularis, à centro gravitatis ponderum omnium in planum idem cadens, ducta in pondera omnia.

Sint pondera A, B, C , sita ad eandem partem plani, cujus sectio recta DF , inque ipsum à singulis ponderibus ducantur perpendiculares AD, BE, CF . Sit autem G punctum centrum gravitatis ponderum omnium A, B, C , à quo ducatur perpendicularis in idem planum GH . Dico summam productorum, quæ fiunt à singulis ponderibus in suas perpendiculares, æquari producto ab recta GH in omnia pondera A, B, C .



Intelligentur enim perpendiculares, à singulis ponderibus ductæ, continuari in lateram partem plani DF , sintque singulæ DK, EL, FM , ipsi HG æquales; omnesque lineæ, inflexiles virgas referant, ad horizontem parallelas; & ponantur in K, L, M , gravitates ejusmodi, quæ singulæ cum sibi oppositis A, B, C , æquilibrium faciant ad intersectionem plani DEF . Omnes igitur K, L, M , æquiponderabunt omnibus A, B, C . Erit autem, sicut longitudo AD ad DK , ita pondus K ad pondus A , ac proinde DA ducta in magnitudinem A , æquabitur DK , five GH , ductæ in K . Similiter

ter $E B$ in B æquabitur $E L$, five $G H$, in L ; & $F C$ in C æquabitur $F M$,
 five $G H$, in M . Ergo summa productorum ex $A D$ in A , $B E$ in B ,
 $C F$ in F , æquabitur summæ productorum ex $G H$ in omnes K , L , M .
 Quum autem K , L , M , æquiponderent ipsis A , B , C , etiam iisdem
 A , B , C , ex centro ipsorum gravitatis G suspensis, æquipondera-
 bunt. Vnde, cum distantia $G H$ æqualis sit singulis $D K$, $E L$, $F M$,
 necesse est magnitudines A , B , C , simul sumptas, æquari ipsis K , L ,
 M . Itaque & summa productorum ex $G H$ in omnes A , B , C , æqua-
 bitur productis ex $D A$ in A , $E B$ in B , & $F C$ in C . quod erat demon-
 strandum.

Et si vero in demonstratione positæ fuerint rectæ $A D$, $G H$,
 $C F$, horizonti parallelæ, & planum ad horizontem erectum; pa-
 tet, si omnia simul in alium quemlibet situm transponantur, ean-
 dem manere productorum æqualitatem, cum rectæ omnes sint
 eadem quæ prius. Quare constat propositum.

P R O P O S I T I O I I .

Positis quæ prius, si pondera omnia A , B , C , sint equalia;
 dico summam omnium perpendicularium $A D$, $B E$, $C F$,
 æquari perpendiculari, à centro gravitatis ductæ, $G H$, multi-
 plici secundum ponderum numerum.

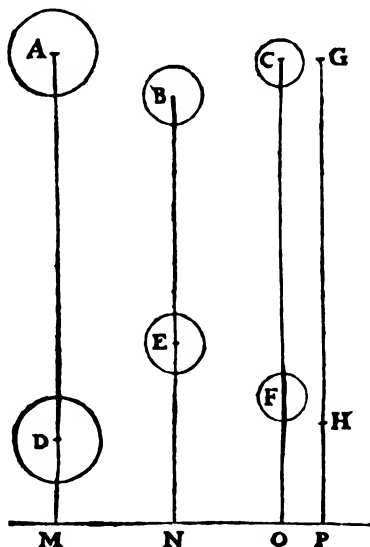
Quum enim summa productorum, à ponderibus singulis in suas
 perpendiculares, æquetur producto ex $G H$ in pondera omnia; sit-
 que hic, propter ponderum æqualitatem, summa illa producto-
 rum æqualis producto ex uno pondere in summam omnium per-
 pendicularium; itemque productum ex $G H$ in pondera omnia,
 idem quod productum ex pondere uno in $G H$, multiplicem secun-
 dum ponderum numerum: patet summam perpendicularium ne-
 cessario jam æquari ipsi $G H$, multiplici secundum ponderum nu-
 merum. quod erat demonstrandum.

P R O P O S I T I O I I I .

Si magnitudines quadam descendant omnes, vel ascen-
 dant, licet inæqualibus intervallis; altitudines descen-
 sus vel ascensus cujusque, in ipsam magnitudinem ductæ, ef-
 ficient summam productorum æqualem ei, quæ fit ex altitudi-
 ne descensus vel ascensus centri gravitatis omnium magni-
 tudinum, ducta in omnes magnitudines.

N

Sunto magnitudines A, B, C , quæ ex A, B, C , descendant in D, E, F ; vel ex D, E, F , ascendant in A, B, C . Sitque earum centrum gravitatis omnium, dum sunt in A, B, C , eadem altitudine cum puncto G ; cum vero sunt in D, E, F , eadem altitudine cum puncto H . Dico summam productorum ex altitudine $A D$ in $A, B E$ in $B, C F$ in C , æquari producto ex $G H$ in omnes A, B, C .



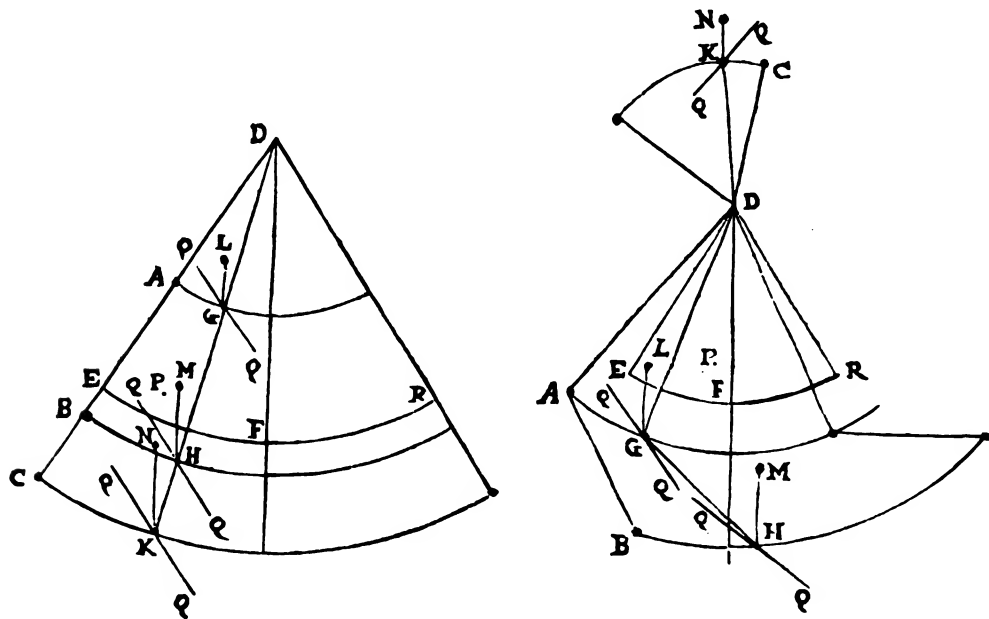
Intelligatur enim planum horizontale cujus sectio recta MP , atque in ipsum incidant productæ AD, BE, CF & GH , in M, N, O, P .

Quia igitur summa productorum ex AM in A, BN in B, CO in C , æqualis est facto ex GP in omnes A, B, C *. Similiterque summa productorum ex DM in A, EN in B, FO in C , æqualis facto ex HP in omnes A, B, C ; sequitur & excessum priorum productorum supra posteriora, æquari facto ex GH in omnes magnitudines A, B, C . Dicitum vero excessum æquari manifestum est productis ex AD in A, BE in B, CF in C . Ergo hæc simul etiam æqualia erunt producto ex GH in omnes A, B, C . quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

Si pendulum è pluribus ponderibus compositum, atque è quiete dimissum, partem quamcunque oscillationis integra confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quousque possunt ascendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus composita, ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam oscillationem obtinebat.

Sit pendulum compositum ex ponderibus quotlibet A, B, C , virgæ, vel superficiei pondere carenti, inhærentibus. Sitque suspensum ab axe per D punctum ducto, qui ad planum, quod hic conspicitur, perpendicularis intelligatur. In quo eodem plano etiam centrum gravitatis E , ponderum A, B, C , positum sit; lineaque centri $D E$, inclinetur ad lineam perpendiculi $D F$, angulo $E D F$: attracto, nimirum, eo usque pendulo. Hinc vero dimitti jam ponatur, ac partem quamlibet oscillationis conficere, ita ut pondera A, B, C , perveniant in G, H, K . Vnde, relicto deinceps communi vinculo, singula intelligantur acquisitas celeritates sursum convertere, (quod impingendo in plana quædam inclinata, velut $Q Q$, fieri poterit,) & quousque possunt ascendere, nempe in L, M, N . Quo ubi pervenerint, sit centrum gravitatis omnium punctum P . Dico hoc pari altitudine esse cum puncto E .



Nam primum quidem, constat P non altius esse quam E , ex prima sumptarum hypothesium. Sed nec humilior fore sic ostendemus. Sit enim, si potest, P humilior quam E , & intelligantur pondera ex iisdem, ad quas ascenderunt, altitudinibus recidere, quæ sunt $L G, M H, N K$. Vnde quidem easdem celeritates ipsis acquiri constat, quas habebant ad ascendendum ad istas altitudines*, hoc est, eas ipsas quas acquisierant motu penduli ex $C B A D$ in $K H G D$. Quare, si cum dictis celeritatibus ad virgam superficiemve, cui innexa fuere, nunc referantur, eique simul adhærescant, motumque secundum inceptos arcus continuent; quod fiet, si priusquam virgam attingant, à planis inclinatis $Q Q$ repulsa intelli-

* Propos. 4.
part. 2.

N ij

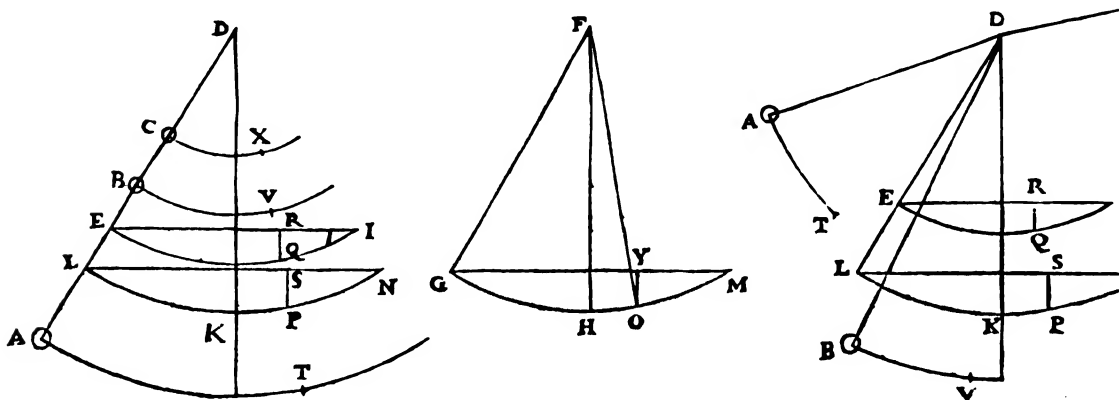
* Hypoth. 1.
huj.

gantur; absolvet, hoc modo restitutum pendulum, oscillationis partem reliquam, æquè ac si absque ulla interruptione motum continuasset. Ita ut centrum gravitatis penduli, E , arcus æquales EF , FR , descendendo ac ascendendo percurrat, ac proinde in R eadem ac in E altitudine reperiatur. Ponebatur autem E esse altius quam P centrum gravitatis ponderum in L , M , N , positorum. Ergo & R altius erit quam P : adeoque ponderum ex L , M , N , delapsorum centrum gravitatis, altius, quam unde descenderat, ascendisset. quod est absurdum*. Non igitur centrum gravitatis P humilior est quam E . Sed nec altius erat. Ergo æque altum sit necesse est. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO V.

Dato pendulo ex ponderibus quotlibet composito, si singula ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam, in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis; orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi.

Sint pondera pendulum componentia, (quorum nec figura nec magnitudo, sed gravitas tantum consideretur), A , B , C , suspensa



ab axe, qui per punctum D , ad planum quod conspicitur, rectus intelligitur. In quo plano sit quoque eorum centrum commune gravitatis E ; nam pondera in diversis esse nihil refert. Distantia puncti E ab axe, nempe recta ED , vocetur d . Item ponderis A distantia AD , sit e ; BD , f ; CD , g . Ducendo itaque singula pondera in qua-

drata suarum distantiarum, erit productorum summa $aec + bff + cgg$. Et rursus, ducendo summam ponderum in distantiam centri gravitatis omnium, productum æquale erit $ad + bd + cd^*$. Vnde, productum prius per hoc dividendo, habebitur $\frac{aee + bff + cgg}{ad + bd + cd}$. Cui longitudini si æqualis statuatur longitudo penduli simplicis FG , quæ etiam x vocabitur; dico hoc illi composito isochronum esse.

Ponantur enim tum pendulum FG , tum linea centri DE , æqualibus angulis à linea perpendiculi remota, illud ab FH , hæc ab DK , atque inde dimissa librari, & in recta DE sumatur DL æqualis FG . Itaque pondus G penduli FG , integra oscillatione arcum GM percurrer, quem linea perpendiculi FH medium secabit. punctum vero L arcum illi similem & æqualem LN , quem medium dividet DK . Itemque centrum gravitatis E , percurrer similem arcum EI . Quod si in arcubus GM , LN , sumptis punctis quibuscumlibet, similiter ipsos dividantibus, ut O & P , eadem celeritas esse ostendatur ponderis G in O , & puncti L in P ; constabit inde æqualibus temporibus utrosque arcus percurri, ac proinde pendulum FG , pendulo composito ex A , B , C , isochronum esse. Ostendetur autem hoc modo.

Sit primo, si potest, major celeritas puncti L , ubi in P pervenit, quam ponderis G in O . Constat autem, dum punctum L percurrit arcum LP , simul centrum gravitatis E percurrere arcum similem EQ . Ducantur à punctis Q , P , O , perpendiculares sursum, quæ occurrant subtensis arcuum EI , LN , GM , in R , S , Y . & SP vocetur γ . Vnde, cum sit ut LD , x , ad ED , d , ita SP , γ , ad RQ ; erit RQ æqualis $\frac{d^2}{x}$. Iam quia pondus G eam celeritatem habet in O , qua valet ad eandem unde descendit altitudinem ascendere, nempe per arcum OM , vel perpendicularem OY ipsi PS æqualem; punctum igitur L , ubi in P pervenerit, majorem ibi celeritatem habebit, quam qua ascenditur ad altitudinem PS . Dum vero L transit in P , simul pondera A , B , C , similes arcus percurrunt ipsi LP , nimirum AT , BV , CX . Estque puncti L celeritas in P , ad celeritatem ponderis A in T , quum vinculo eodem contineantur, sicut distantia DL ad DA . Sed ut quadratum celeritatis puncti L , quam habet in P , ad quadratum celeritatis puncti A in T , ita est altitudo ad quam illa celeritate ascendi potest, ad altitudinem quò hac celeritate ascendi potest*. Ergo etiam, ut quadratum distantiae DL , quod est xx , ad quadratum distantiae DA , quod est ee , ita est altitudo quo ascenditur celeritate puncti L , quum est in P , (quæ altitudo major dicta est quam PS sive γ), ad altitudinem quo ascenditur celeritate ponderis A in T ; si nempe postquam in T pervenit, relicto pendulo,

N iij

D E CENTRO
O S C I L L A -
T I O N I S.
* Prop 1. huj.

* Prop 3. & 4
part. 2.

seorsim motum suum sursum converteret. Quæ proinde altitudo major erit quam $\frac{ee}{xx}$.

Eadem ratione, erit altitudo ad quam ascenderet pondus B, celeritate acquisita per arcum B V, major quam $\frac{ff}{xx}$. Et altitudo ad quam ascenderet pondus C, celeritate acquisita per arcum C X, major quam $\frac{gg}{xx}$. Vnde, ductis singulis altitudinibus istis in sua pondera, erit summa productorum major quam $\frac{eee + bff + cgg}{xx}$. quæ proinde major quoque probatur quam $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$. Nam quia posita est longitudo x æqualis $\frac{eee + bff + cgg}{ad + bd + cd}$; erit $adx + bdx + cdx$ æquale $eee + bff + cgg$. Et ductis omnibus in y, & dividendo per xx, erit $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ æquale $\frac{eee + bff + cgg}{xx}$. Vnde quod dictum est consequitur. Est autem summa ista productorum æqualis ei, quod fit ducendo altitudinem, ad quam ascendit centrum gravitatis commune ponderum A, B, C, in summam ipsorum ponderum, $a + b + c$; si nempe singula, uti dictum, seorsim quousque possunt moveantur. Quantitas vero $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ producitur ex descensu centri gravitatis eorundem ponderum, (qui descensus est R Q, sive $\frac{dy}{x}$, ut supra inventum fuit,) in eandem quoque ponderum summam $a + b + c$. Ergo quum prius productum altero hoc majus ostensum fuerit, sequitur ascensum centri gravitatis ponderum A, B, C, si, relicto pendulo ubi pervenere in T, V, X, singula celeritates acquisitas sursum convertant, majorem fore ejusdem centri gravitatis descensu, dum ex A, B, C, moventur in T, V, X. quod est absurdum, cum dictus ascensus descensui æqualis esse debeat, per antecedentem.

Eodem modo, si dicatur celeritatem puncti L, ubi pervenerit in P, minorem esse celeritate ponderis G quum in O pervenerit; ostendemus ascensum possibilem centri gravitatis ponderum A, B, C, minorem esse quam descensum, quod eidem propositioni antecedenti repugnat. Quare relinquitur ut eadem sit celeritas puncti L, ad P translari, quæ ponderis G in O. Vnde, ut superius dictum, sequitur pendulum simplex F G composito ex A, B, C, isochronum esse.

PROPOSITIO VI.

Dato pendulo ex quocunque ponderibus equalibus composito; si summa quadratorum factorum à distantis, quibus unumquodque pondus abest ab axe oscillationis, ap-

plicetur ad distantiam centri gravitatis communis ab eodem oscillationis axe, multiplicem secundum ipsorum ponderum numerum, orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni.

DE CENTRO
OSCILLA-
TIONIS.

Sint posita eadem quæ prius, sed pondera omnia inter se æqualia intelligantur, & singula dicantur a . Rursus vero nulla eorum magnitudo consideretur, sed pro minimis habeantur, quantum ad extensionem.

Itaque penduli simplicis isochroni longitudo, per propositionem antecedentem, erit $\frac{aee+aff+agg}{ad+ad+ad}$. Vel, quia quantitas divisa ac dividens utraque per a dividitur, fiet nunc eadem longitudo, $\frac{ee+ff+gg}{3d}$. Quo significatur summa quadratorum à distantiiis ponderum ab axe oscillationis, applicata ad distantiam centri gravitatis omnium ab eodem oscillationis axe, multiplicem secundum numerum ipsorum ponderum, qui hic est 3. facile enim perspicitur numerum hunc, in quem ducitur distantia d , respondere necessario ipsi ponderum numero. Quare constat propositum.

Quod si pondera æqualia in unam lineam rectam conjuncta sint, atque ex termino ejus superiore suspensa; constat distantiam centri gravitatis, ex omnibus compositæ, ab axe oscillationis, multiplicem secundum ponderum numerum, æquari summæ distantiarum omnium ponderum ab eodem oscillationis axe*; ac proinde, hoc casu, habebitur quoque longitudo penduli simplicis, composito isochroni, si summa quadratorum à distantiiis ponderum singulorum ab axe oscillationis, dividatur per summam earundem omnium distantiarum.

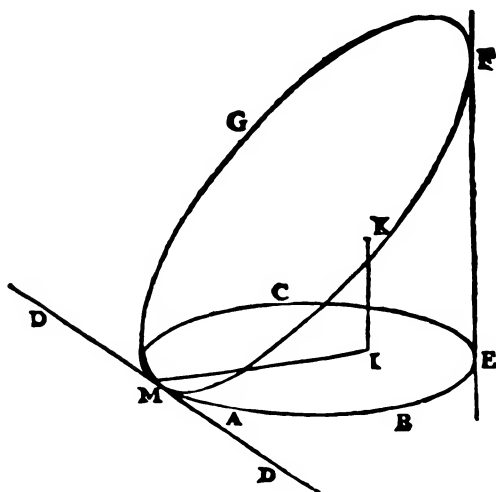
* Prop. 2. huj.

DEFINITIO XIV.

S*I fuerint in eodem plano, figura quadam, & linea recta qua ipsam extrinsecus tangat; & per ambitum figura alia recta, plano ejus perpendicularis, circumferatur, superficiemque quandam describat, qua deinde secetur plano per dictam tangentem ducto & ad dicta figura planum inclinato; solidum comprehensum à duobus planis istis, & parte superficiemque descripta, inter utrumque planum intercepta, vocetur Cuneus super figura illa, tanquam basi, abscissus.*

In schemate adjecto, est ABC figura data; recta eam tangens

$M D$; quæ vero per ambitum ejus circumfertur, $E F$; cuneus au-



tem figura solida planis $A B E C$, $M F G$, & parte superficiei, à recta $E F$ descriptæ, comprehensa.

DEFINITIO XV.

Distantia inter rectam, per quam cuneus abscissus est, & punctum baseos, in quod perpendicularis cadit à cunei centro gravitatis, dicatur cunei Subcentrica. Nempe in figura eadem, si K sit centrum gravitatis cunei, recta vero $K I$ ad basin ejus $A B E C$ perpendicularis ducta sit, & rursus $I M$ perpendicularis ad $A D$; erit $I M$, quam subcentricam dicimus.

PROPOSITIO VII.

Cuneus super plana figura qualibet abscissus, plano inclinato ad angulum semirectum, æqualis est solido, quod fit ducendo figuram eandem, in altitudinem æqualem distantie centri gravitatis figura, ab recta per quam abscissus est cuneus.

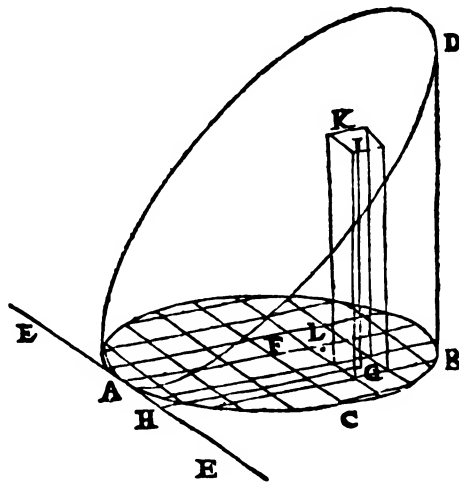
Sit, super figura plana $A C B$, cuneus $A B D$ abscissus plano ad angulum semirectum inclinato, ac transeunte per $E E$, rectam tangentem figuram $A C B$, inque ejus plano sitam. Centrum vero gravitatis figuræ sit F , unde in rectam $E E$ ducta sit perpendicularis $F A$. Dico cuneum $A C B$ æqualem esse solido, quod fit ducendo figuram $A C B$ in altitudinem ipsi $F A$ æqualem.

Intelligatur enim figura $A C B$ divisa in particulas minimas æquales

les quarum una G. Itaque constat, si harum singulæ ducantur in distantiam suam ab recta EE, summam productorum fore æqualem ei quod fit ducendo rectam AF in particulas omnes*, hoc est, ei quod fit ducendo figuram ipsam ACB, in altitudinem æqualem AF. Atqui particulæ singulæ ut G, in distantias suas GH ductæ, æquales sunt parallelepipedis, vel prismatibus minimis, super ipsas erectis, atque ad superficiem obliquam AD terminatis, quale est GK; quia horum altitudines ipsis distantis GH æquantur, propter angulum semirectum inclinationis planorum AD & ACB. Paterque ex his parallelepipedis totum cuneum ABD componi. Ergo & cuneus ipse æquabitur solido super basi ACB, altitudinem habenti rectæ FA æqualem. quod erat demonstrandum.

DE CENTRO
OSCILLATIONIS.

* Prop. 1. huj.



PROPOSITIO VIII.

Si figuram planam linea recta tangat, divisaque intelligatur figura in particulas minimas æquales, atque à singulis ad rectam illam perpendiculares ductæ: erunt omnium harum quadrata, simul sumpta, æqualia rectangulo cuidam, multiplici secundum ipsarum particularum numerum; quod nempe rectangulum fit à distantia centri gravitatis figura ab eadem recta, & à subcentrica cunei, qui per illam super figura abscinditur.

Positis enim cæteris omnibus quæ in constructione præcedenti, sit L A cunei ABD subcentrica in rectam EE. Oportet igitur ostendere, summam quadratorum omnium à distantis particularum

O

figuræ ACB æquari rectangulo $ab FA, LA$, multiplici secundum particularum numerum.

Et constat quidem ex demonstratione præcedenti, altitudines parallelepipedorum singulorum, ut GK , æquales esse distantis particularum, quæ ipsorum bases sunt, ut G , ab recta AE . Quare, si jam parallelepipedum GK ducamus in distantiam GH , perinde est ac si particula G ducatur in quadratum distantia GH . Eodemque modo se res habet in reliquis omnibus. Atqui producta omnia parallelepipedorum in distantias suas ab recta AE , æquantur simul producto ex cuneo ABD in distantiam LA *, quia cuneus gravitat super puncto L . Ergo etiam summa productorum à particulis singulis G , in quadrata suarum distantiarum ab recta AE , æquabitur producto ex cuneo ABD in rectam LA , hoc est, producto ex figura ACB in rectangulum $ab FA, LA$. Nam cuneus ABD , æqualis est producto ex figura ACB in rectam FA *. Rursus quia figura ACB æqualis est producto ex particula una G , in numerum ipsarum particularum; sequitur, dictum productum ex figura ACB in rectangulum $ab FA, LA$, æquari producto ex particula G in rectangulum $ab FA, LA$, multiplici secundum numerum particularum G . Cui proinde etiam æqualis erit dicta summa productorum, à particulis singulis G in quadrata suarum distantiarum ab recta AE , sive à particula una G in summam omnium horum quadratorum. Quare, omissa utrinque multiplicatione in particulam G , necesse est summam eandem quadratorum æquari rectangulo $ab FA, LA$, multiplici secundum numerum particularum in quas figura ACB divisa intelligitur. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. præced.

PROPOSITIO IX.

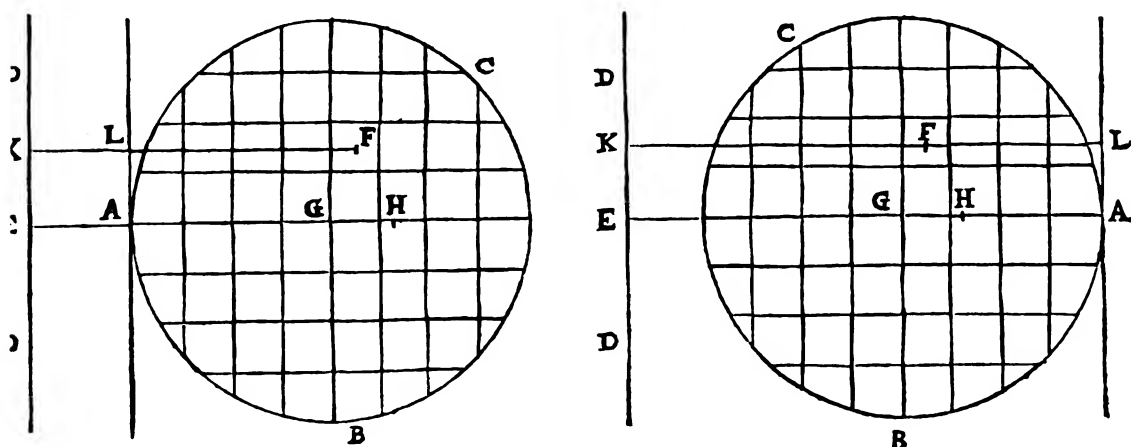
D Atâ figurâ planâ & in eodem plano lineâ rectâ, quæ vel secet figuram vel non, ad quam perpendiculares cadant à particulis singulis minimis & equalibus, in quas figura divisa intelligitur; invenire summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus; sive planum, cujus multiplex, secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summa æquale sit.

Sit data figura plana ABC , & in eodem plano recta ED ; divisâque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, intelligentur ab unaquaque earum perpendiculares ductæ in rectam ED , sicut à particula F ducta est FK . Oporteatque invenire

summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus.

DE CENTRO
OSCILLA-
TIONIS.

Sit datæ ED parallela recta AL , quæ figuram tangat, ac tota extra eam posita sit. Potest autem figuram vel ab eadem parte ex qua est ED , vel à parte opposita contingere. Distantia vero centri gravitatis figuræ ab recta AL sit recta GA , secans ED in E ; & subcentrica cunei, super figura abscissi plano per rectam AL , sit HA . Dico summam quadratorum quæsitam æquari rectangulo AGH una cum quadrato EG , multiplicibus secundum particularum numerum, in quas figura divisa intelligitur.



Occurrat enim FK , si opus est producta, tangenti AL in L puncto. Itaque primum, eo casu quo recta ED à figura distat, & tangens AL ad eandem figuræ partem ducta est, sic propositum ostendetur. Summa omnium quadratorum FK æquatur totidem quadratis KL , una cum bis totidem rectangulis $KL F$, & totidem insuper quadratis LF . Sed quadrata KL æquantur totidem quadratis EA . Et rectangula $KL F$ æqualia esse constat totidem rectangulis EAG , quia omnes FL æquales totidem GA *. Et denique quadrata LF æquantur totidem rectangulis HAG *, hoc est, totidem quadratis AG cum totidem rectangulis AGH . Ergo quadrata omnia FK æqualia erunt totidem quadratis EA , cum totidem duplis rectangulis EAG , atque insuper totidem quadratis AG cum totidem rectangulis AGH . Atqui tria ista; nempe quadratum EA cum duplo rectangulo EAG & quadrato AG ; faciunt quadratum EG . Ergo apparet quadrata omnia FK æquari totidem quadratis EG , una cum totidem rectangulis AGH . Quod erat ostendendum.

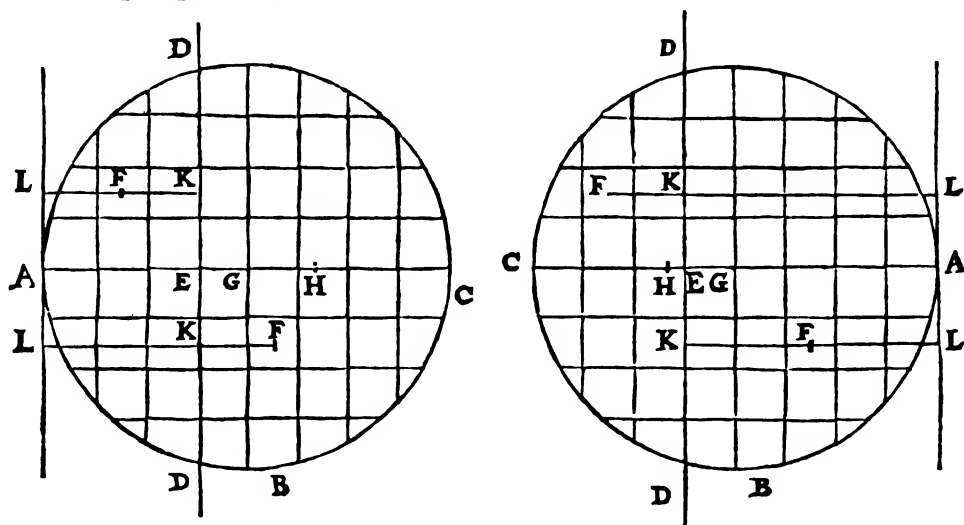
* Prop. 2. huj.

* Prop. præced.

Porro in reliquis omnibus casibus, quadrata omnia FK æquantur totidem quadratis KL , minus bis totidem rectangulis $KL F$, plus totidem quadratis LF ; hoc est, totidem quadratis EA , minus totidem duplis rectangulis EAG , plus totidem quadratis AG , cum to-

O ij

dem rectangulis AGH . Atqui, omnibus hisce casibus, fit quadratum EA , plus quadrato AG , minus duplo rectangulo EAG , æquale quadrato EG . Ergo rursus quadrata omnia FK æqualia erunt totidem quadratis EG , una cum totidem rectangulis AGH . Quare constat propositum.

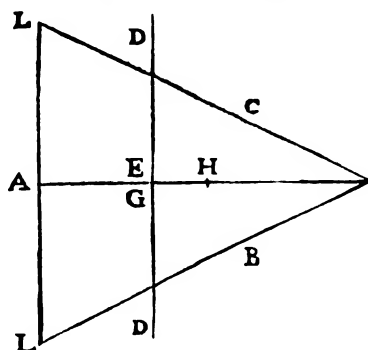


Hinc sequitur, rectangulum AGH eadem magnitudine esse, utriusvis cunei subcentrica fuerit AH ; hoc est, sive per hanc, sive per illam tangentium parallelarum AL abscissi. Itaque AG unius casus ad AG alterius, ut HG hujus ad HG illius. Sicut autem rectæ AG inter se, ita in utroque casu cunei per AL abscissi, ut colligitur ex prop. 7. huj. Ergo ita quoque reciproce GH ad GH .

Apparet etiam, dato figuræ planæ centro gravitatis G , & subcentrica cunei, per alterutram tangentium parallelarum AL abscissi, dari quoque cunei, per tangentem alteram AL abscissi, subcentricam.

PROPOSITIO X.

Positis quæ in propositione precedenti; si data recta ED transeat per G , centrum gravitatis figuræ ABC ; erit sum-



ma quadratorum à distantiis particularum, in quas figura

divisa intelligitur, ab recta ED, aequalis rectangulo soli AGH, DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Hoc enim manifestum est, quum nullum tunc sit quadratum.

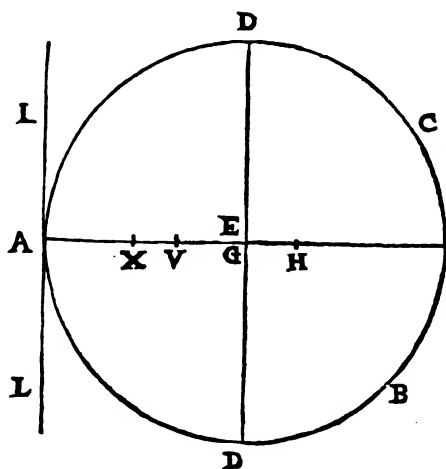
E G.

PROPOSITIO XI.

Positis rursus cateris ut in precedentium penultima; si
DE sit axis figura plana ABC, in duas aequales simile-
que portiones eam dividens, sitque insuper VG distantia cen-
tri gravitatis dimidia figura DAD ab recta ED, cunei vero,
super ipsam abscissi per ipsam ED, subcentrica GX; erit re-
ctangulum XGV aequale rectangulo AGH.

Est enim rectangulum $x \text{ } G \text{ } v$, multiplex secundum numerum particularum figuræ $D A D$, æquale quadratis omnibus perpendicularium à particulis ejusdem figuræ dimidiæ in rectam $E D$ cadentium *. Ac proinde idem rectangulum $x \text{ } G \text{ } v$, multiplex secun-

* Prop. 8. huj.



dum numerum particularum totius figuræ ABC , æquale erit quadratis perpendicularium, ab omnibus particulis figuræ hujus in rectam ED demissarum; hoc est, rectangulo AGH multiplici secundum eundem particularum numerum, ut constat ex propof. præcedenti. Vnde fequitur rectangula xgv , AGH inter fe æqualia effe. quod erat demonftrandum.

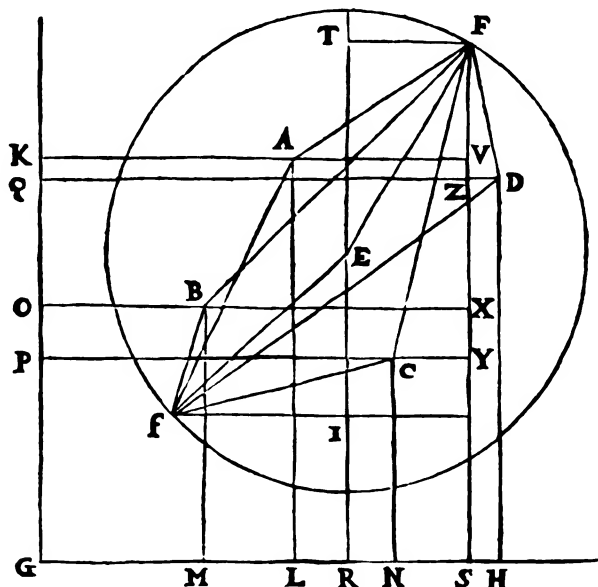
PROPOSITIO XII.

D Atis in plano punctis quotlibet; si ex centro gravitatis eorum circulus quilibet describatur; ducantur autem ab omnibus datis punctis, ad punctum aliquod in circuli illius

O iij

circumferentia linea recta; erit summa quadratorum ab omnibus semper eidem plano aequalis.

Sint data puncta $A B C D$: centrumque gravitatis eorum, five magnitudinum æqualium ab ipsis suspensarum, sit E ; & centro E describatur circulus quilibet Ff , in cujus circumferentia sumpto puncto aliquo, ut F , ducantur ad id, à datis punctis, rectæ AF, BF, CF, DF . Dico earum omnium quadrata, simul sumpta, æqualia esse plano cuidam dato, semperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum F sumptum fuerit.



Ducantur enim rectæ GH, GK , angulum rectum constituentes, & quarum unicuique omnia data puncta sint posita ad eandem partem. Et à singulis in utramque harum perpendiculares agantur $AL, AK; BM, BO; CN, CP; DH, DQ$. A centro autem gravitatis E , & à puncto F , in alterutram duarum, GH vel GK , perpendiculares ER, FS . Et item, à datis punctis, in ipsam FS perpendiculares AV, BX, CY, DZ . Et FT perpendicularis in ipsam ER . Porro sit jam

$$\begin{array}{lll} AL \propto a & AK \propto c & \text{radius } EF \propto r \\ BM \propto b & BO \propto f & GS \propto x \\ CN \propto c & CP \propto g & \\ DH \propto d & DQ \propto h & \end{array}$$

Quia autem E est centrum gravitatis punctorum A, B, C, D ; si addantur in unum perpendiculares AL, BM, CN, DH , compositaque ex omnibus dividatur in tot partes, quot sunt data puncta;

* Prop. 2. huj. earum partium uni æqualis erit ER *. Similiterque, divisâ in toti-

dem partes summâ perpendicularium AK, BO, CP, DQ , earum uni æqualis erit perpendicularis, ducta ex E in rectam GK , sive ipsa RG^* . Itaque, si summa omnium AL, BM, CN, DH , sive $a + b + c + d$ vocetur l : summa vero omnium, AK, BO, CP, DQ , sive $e + f + g + h$, vocetur m : & numerus, datorum punctorum multitudinem exprimens, dicatur θ ; erit $ER \propto \frac{l}{\theta}$; & $RG \propto \frac{m}{\theta}$. Cumque G sit α , erit RS sive $FT \propto x - \frac{m}{\theta}$; vel $\frac{m}{\theta} - x$, si GR major quam GS ; & semper quadratum $FT \propto xx - 2x\frac{m}{\theta} + \frac{m^2}{\theta^2}$. quo ablato ab quadrato $FE \propto \mathcal{Z}\mathcal{Z}$, relinquetur quadratum $TE \propto \mathcal{Z}\mathcal{Z} - xx + 2x\frac{m}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}$. Et proinde $TE \propto \sqrt{\mathcal{Z}\mathcal{Z} - xx + 2x\frac{m}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}}$. Erat autem $ER \propto \frac{l}{\theta}$. Itaque $TR \propto \frac{l}{\theta} +$ vel $- \sqrt{\mathcal{Z}\mathcal{Z} - xx + 2x\frac{m}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}}$. quæ TR , brevitatis gratia, dicatur y . Colligamus jam porro summam quadratorum omnium FA, FB, FC, FD . Quadratum AF æquatur quadratis AV, VF . Est autem AV æqualis differentię duarum VK, AK , sive duarum SG, AK ; ac proinde $AV \propto x - e$ vel $e - x$; & qu. $AV \propto xx - 2ex + ee$. VF vero æqualis est differentię duarum FS, VS sive duarum FS, AL ; ac proinde $VF \propto y - a$ vel $a - y$; & qu. $VF \propto yy - 2ay + aa$. Additisque quadratis AV, VF , fit quadratum $FA \propto xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$. Eodemque modo invenientur quadrata reliquarum FB, FC, FD ; atque omnia ordine disposita erunt hæc;

$$\text{qu. } FA \propto xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa.$$

$$\text{qu. } FB \propto xx - 2fx + ff + yy - 2by + bb.$$

$$\text{qu. } FC \propto xx - 2gx + gg + yy - 2cy + cc.$$

$$\text{qu. } FD \propto xx - 2hx + hh + yy - 2dy + dd.$$

Horum vero summa; si ponamus quadrata $ee + ff + gg + hh \propto nn$; & quadrata $aa + bb + cc + dd \propto kk$; erit ista, $\theta xx - 2mx + nn + \theta yy - 2ly + kk$. Siquidem θ erat numerus datorum punctorum ideoque & quadratorum, positumque fuerat $e + f + g + h \propto m$, & $a + b + c + d \propto l$.

In ista vero summa, si in terminis θyy & $2ly$, pro y , ponatur id cujus loco positum erat, nempe $\frac{l}{\theta} +$ vel $- \sqrt{\mathcal{Z}\mathcal{Z} - xx + 2x\frac{m}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}}$, fiet $+ \theta yy \propto \frac{l^2}{\theta} + 2l \sqrt{\mathcal{Z}\mathcal{Z} - xx + 2x\frac{m}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}} + \theta \mathcal{Z}\mathcal{Z} - \theta xx + 2\mathcal{Z}m - \frac{m^2}{\theta}$. & $- 2ly \propto - 2\frac{l^2}{\theta} - 2l \sqrt{\mathcal{Z}\mathcal{Z} - xx + 2x\frac{m}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}}$. vel $+ \theta yy \propto \frac{l^2}{\theta} - 2l \sqrt{\mathcal{Z}\mathcal{Z} - xx + 2x\frac{m}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}} + \theta \mathcal{Z}\mathcal{Z} - \theta xx + 2\mathcal{Z}m - \frac{m^2}{\theta}$. & $- 2ly \propto - 2\frac{l^2}{\theta} + 2l \sqrt{\mathcal{Z}\mathcal{Z} - xx + 2x\frac{m}{\theta} - \frac{m^2}{\theta^2}}$.

Ac proinde, utroque casu, pro $\theta yy - 2ly$ habebitur $-\frac{l^2}{\theta} + \theta \mathcal{Z}\mathcal{Z} - \theta xx + 2\mathcal{Z}m - \frac{m^2}{\theta}$. Quò appositis reliquis quantitativibus, summa prædi-

cta contentis, $\theta x x - 2 x m + n n + k k$, fiet tota summa, nempe quadratorum FA, FB, FC, FD , $\propto \theta x x + n n + k k - \frac{m m}{i}$. Quod apparet esse planum datum, cum hæ quantitates omnes datæ sint; semperque idem reperiri, ubicunque in circumferentia sumptum fuerit punctum F . quod erat demonstrandum.

Quod si puncta data diversas gravitates habere ponantur, invicem commensurabiles, ut si punctum A ponderet ut 2, B ut 3, C ut 4, D ut 7, eorumque reperto gravitatis centro, circulus rursus describatur, ad cujus circumferentiæ punctum, à datis punctis rectæ ducantur, ac singularum quadrata multiplicia sumantur secundum numerum ponderis puncti sui; ut quadratum AF duplum, BF triplum, CF quadruplum, DF septuplum; dico rursus summam omnium æqualem fore spatio dato, semperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum sumptum fuerit. Patet enim hoc ex præcedenti demonstratione, si imaginemur puncta ipsa multiplicia secundum numeros attributæ cuique gravitatis; quasi nempe in A duo puncta conjuncta sint, in B tria, in C quatuor, in D septem, atque illa omnia æqualiter gravia.

PROPOSITIO XIII.

S*I figura plana, vel linea in plano existens, aliter atque aliter suspendatur à punctis, quæ, in eodem plano accepta, æqualiter à centro gravitatis suæ distent; agitata motu in latus, sibi ipsi isochrona est.*

Sit figura plana, vel linea in plano existens ABC , cujus centrum gravitatis D . quo eodem centro, circumferentia circuli in eodem plano describatur, ECF . Dico, si à quovis in illa puncto, ut E, C , vel G , suspensa figura agitetur in latus; sibi ipsi, sive eidem pendulo simplici, isochronam esse.

Sit prima suspensio ex E puncto, quando autem est extra figuram, ut hic, putandum est lineam EH , ex qua figura pendet, rigidam esse, atque immobiliter ipsi affixam.

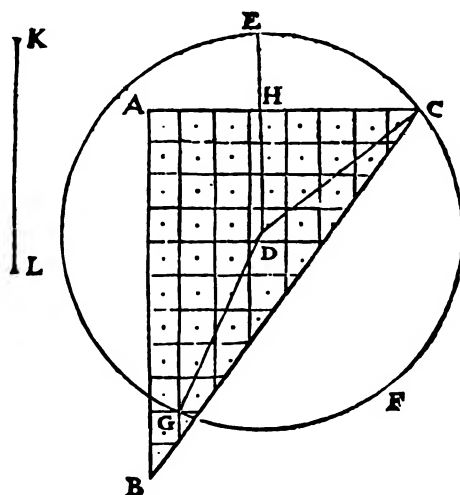
Intelligatur figura ABC divisa in particulas minimas æquales, à quarum omnium centrīs gravitatis, ad punctum E , rectæ ductæ sint; quas quidem manifestum est, quum moveatur figura motu in latus, esse ad axem agitationis perpendiculares. Harum igitur omnium perpendicularium quadrata, divisa per rectam ED , multiplicem secundum numerum particularum in quas figura divisa est, efficiunt longitudinem penduli simplicis, figuræ isochroni*, quæ

* Prop. 6 huj.

quæ sit $\kappa \text{ L}$. Suspensâ autem figurâ ex puncto G , rursus longitudo penduli simplicis isochroni invenitur, dividendo quadrata omnia linearum, quæ à particulis figuræ ducuntur ad punctum G , per rectam G D , multiplicem secundum earundem particularum numerum *. Quum igitur puncta G & E sint in circumferentia descripta * Prop. 6. huj. centro D , quod est centrum gravitatis figuræ A B C , sive centrum

DE CENTRO
OSCILLA-
TIONIS.

* Prop. 6. huj.



gravitatis punctorum omnium, quæ centra sunt particularum figuræ æqualium; erit proinde summa quadratorum à lineis, quæ à dictis particulis ad punctum G ducuntur, æqualis summæ quadratorum à lineis quæ ab iisdem particulis ducuntur ad punctum E *. Hæ vero quadratorum summæ, utraque suspensione, applican- * Prop. præced. tur ad magnitudines æquales: quippe, in suspensione ex E , ad rectam E D , multiplicem secundum numerum omnium particularum; in suspensione autem ex G , ad rectam D G , multiplicem secundum earundem particularum numerum. Ergo patet, ex applicatione hac posteriori, quum nempe suspensio est ex G , fieri longitudinem penduli isochroni eandem atque ex applicatione priori, hoc est, eandem ipsi $\kappa \text{ L}$.

Eodem modo, si ex C , vel alio quovis puncto circumferentiæ E C F , figura suspendatur, eidem pendulo $\kappa \text{ L}$ isochrona esse probabitur. Itaque constat propositum.

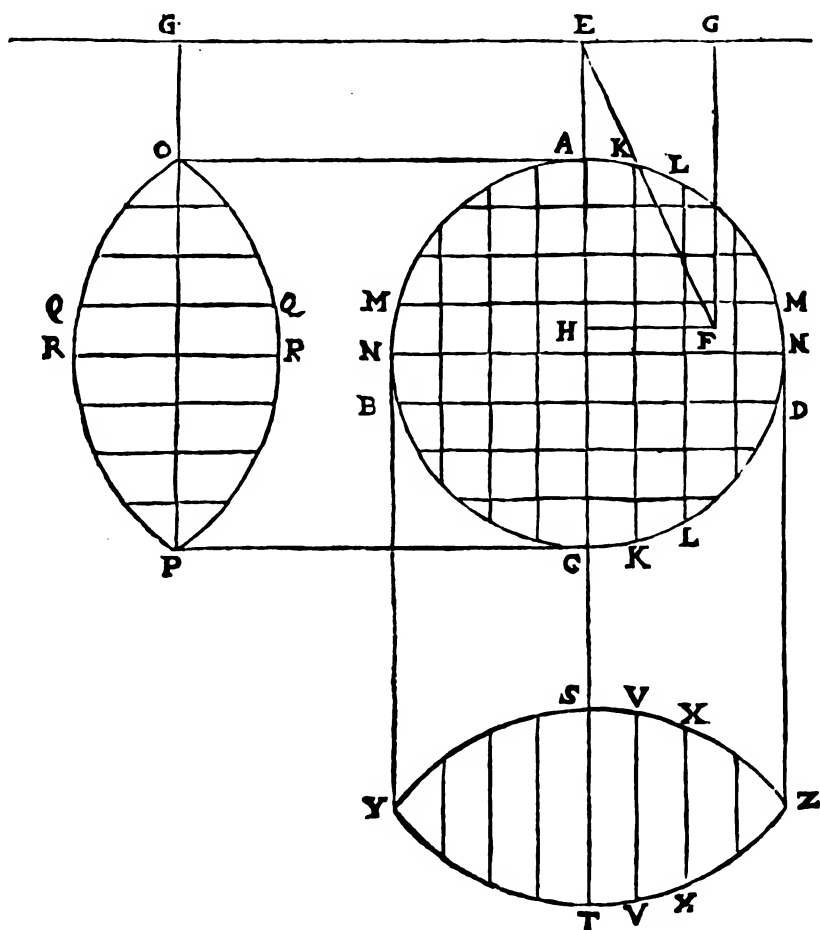
PROPOSITIO XIV.

D Atâ figurâ solidâ, & lineâ rectâ interminatâ, quæ vel extra figuram cadat, vel per eam transeat; divisâque

P

figurá cogitatu in particulas minimas equales, à quibus omnibus ad datam rectam perpendiculares ductæ intelligantur, invenire summam omnium quæ ab ipsis fiunt quadratorum, siue planum, cujus multiplex secundum particularum numerum, dicta quadratorum summa æquale sit.

Sit data figura solida $A B C D$, & linea recta quæ, per punctum E transiens, ad planum hujus paginæ erecta intelligatur: quæque vel fecer figuram, vel tota extra cadat. Intellectoque, à singulis particulis minimis æqualibus, solidum $A B C D$ constituentibus, velut F , rectas duci perpendiculares in datam rectam per E , quemadmodum hic $F E$, oporteat omnium quadratorum $F E$ summam invenire.



Secetur figura plano $E A C$, per dictam datam lineam & per centrum gravitatis figuræ ducto. Item aliud planum intelligatur per eandem lineam datam, perque $E G$, quæ ipsi est ad angulos rectos.

Constat jam, quadratum rectæ cujusque, quæ à particula di-

ctarum aliqua, ad lineam datam per E perpendicularis ducitur, sicut FE , æquari quadratis duarum FG , FH , quæ, ab eadem particula, in plana per EG & EC ante dicta, perpendiculares aguntur *. Quare, si cognoscere possimus summam quadratorum, quæ fiunt ab omnibus perpendicularibus, quæ à particulis universis cadunt in plana dicta per EG & per EC ; habebimus etiam huic æqualem summam quadratorum à perpendicularibus, quæ ab universis iisdem particulis cadunt in rectam datam per E punctum.

DE CENTRO
OSCILLATIONIS.
* 47. lib. I.
Eucl.

Illa vero prior quadratorum summa colligetur hoc modo. Ponatur primò figuram planam dari OQP , ad latus figuræ solidæ $ABCD$, ejusdem cum ipsa altitudinis, quæque sit ejusmodi, ut secta lineis rectis QQ , RR , quæ respondeant planis figuram solidam $ABCD$ secantibus MM , NN , & his parallelis; eadem sit dictarum linearum inter se, quæ & planorum horum ratio, si nempe sumantur utrinque quæ in ordine sibi respondent. Ut si linea RR sit ad QQ quemadmodum planum NN ad MM . Quod si igitur figura plana OQP , in totidem particulas minimas æquales divisa intelligatur, quot intelliguntur in solido $ABCD$, erunt etiam in unoquoque segmento figuræ planæ, velut QQR , tot numero particule, quot sunt in figuræ solidæ segmento $MMNN$, isti segmento respondente; ac proinde & summa quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ OQP in planum EG , æquabitur summæ quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ solidæ, in idem planum EG productis. Illa autem quadratorum summa data erit, si dentur in figura OQP , cuneoque illius, quæ propof. 9. huj. requiri diximus. Ergo his datis, dabitur quoque summa quadratorum, à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus solidi $ABCD$, ducuntur in planum EG .

Ponatur nunc alia item figura plana $SYTZ$, ejusdem cum solido $ABCD$ latitudinis, hoc est, quam includant plana BY , DZ solidum contingentia, ac parallela plano EAC , quæque sit ejusmodi, ut, secta lineis rectis VV , XX &c. quæ respondeant planis figuram $ABCD$ secantibus, KK , LL , & his parallelis, faciat eandem inter se rationem linearum harum atque illorum planorum, si sumantur quæ sibi mutuo respondent. Itaque rursus quadrata simul omnia perpendicularium, à particulis figuræ $SYTZ$ in rectam ST cadentium, æqualia erunt quadratis omnibus perpendicularium quæ, à particulis solidi $ABCD$, ducuntur in planum AC . Illorum autem summa quadratorum data erit, si detur distantia centri gravitatis figuræ $SYTZ$ ab recta BY vel DZ ; nec non distantia indidem centri gra-

DE CENTRO
OSCILLA-
TIONIS.
* Prop. 9. huj.

* Prop. 11. huj.

vitatis cunei sui abscissi plano per eandem rectam *. Vel, figura s y t z ordinata existente, ut s t sit axis ejus, eadem quadratorum summa dabitur, si detur distantia centri gravitatis figuræ dimidiæ s z t ab axe s t, item centri gravitatis cunei, super eadem dimidia figura, abscissi plano per axem ducto *. Ergo, his datis, dabitur quoque summa quadratorum à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, ductæ intelliguntur in planum E A C. Invenimus autem & summam quadratorum, à perpendicularibus omnibus in planum per E G ductis. Ergo & aggregatum utriusque summæ habebitur, hoc est, per superius ostensa, summa quadratorum perpendicularium quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, cadunt in rectam datam per E transeuntem, & ad paginæ hujus planum erectam. quod erat faciendum.

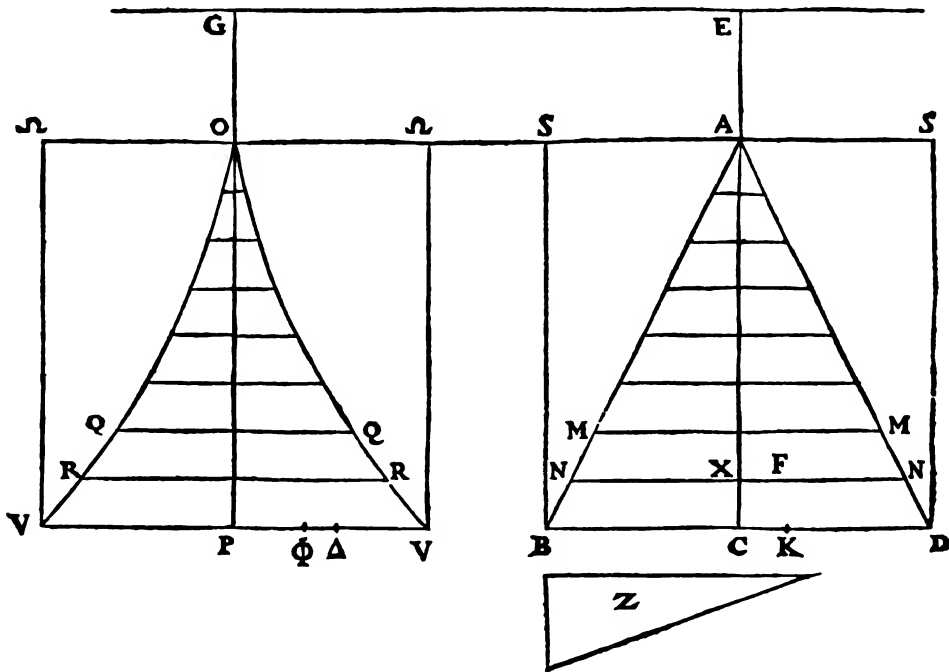
PROPOSITIO XV.

Idem positis, si solidum A B C D sit ejusmodi, ut figura plana s y t z, ipsi proportionalis, non habeat notam distantiam centri gravitatis à tangentibus B Y vel D Z, vel, ut subcentrica cunei super ipsa abscissi, plano per easdem B Y vel D Z, ignoretur, in figura tamen proportionali, quæ à latere est, O Q P, detur distantia Q P, quæ centrum gravitatis figuræ dimidiæ O P V abest ab axe O P; licebit hinc invenire summam quadratorum à distantis particularum solidi A B C D à plano E C. Oportet autem ut sectiones omnes, N N, M M, sint plana similia; utque per omnium centra gravitatis transeat planum E C; quemadmodum in prismatico, pyramide, cono, conoidibus, multisque aliis figuris contingit. Atque eorum planorum distantias centri gravitatis, super tangentibus axi oscillationis parallelis, datas esse necesse est; uti & subcentricas cuneorum, qui super ipsis abscinduntur, ductis planis per easdem tangentes.

Veluti, si maxima dictarum sectionum sit B D, & in B intelligatur recta parallela axi E, hoc est, erecta ad planum quod hic conspicitur, oportet datam esse distantiam centri gr. sectionis B D à dicta linea in B, quæ sit B C; itemque subcentricam cunei, super sectione B D abscissi, plano ducto per eandem lineam in B, quæ subcentrica sit B K.

Etenim his datis, divisâque P V bifariam in Δ, si fiat sicut Δ P ad

¶ ϕ , ita rectangulum BCK ad spatium quoddam Z ; dico hoc ipsum, DE CENTRO OSCILLATIONIS. multiplex per numerum particularum solidi $ABCD$, æquari sum-
mæ quæsitæ quadratorum, à distantii earundem particularum à
plano EC .



Quadrata enim à distantii particularum planæ sectionis BD , à
plano EC , quod per centrum gravitatis suæ transit; sive quadrata
à distantii particularum solidarum segmenti BNN à plano eod-
dem, æquari constat rectangulo BCK , multiplici per numerum
dictarum particularum *. Similiter, si planæ sectionis NN distantia
centri gravitatis, ab recta quæ in N intelligitur axi E parallela, sit
 NX ; subcentrica vero cunei super ipsa abscissi, plano per eandem
rectam, sit NF ; erunt quadrata à distantii particularum planarum
sectionis NN à plano EC , sive quadrata à distantii particularum
solidarum segmenti NMM , à plano eodem, æqualia rectangulo
 NXF , multiplici per numerum particularum ipsarum sectionis NN ,
vel segmenti NMM . Est autem BD divisa similiter in C & K , at-
que NN in X & F . Ergo rectangulum BCK ad rectangulum NXF ,
sicut quadratum BD ad quadratum NN . * Prop. 8. huj.

Est autem & numerus particularum sectionis BD , ad numerum
particularum sectionis NN , sicut sectiones ipsæ; hoc est, sicut
quadratum BD ad quadratum NN . Itaque rectangulum BCK , mul-
tiplex per numerum particularum sectionis BD , ad rectangulum
 NXF , multiplex per numerum particularum sectionis NN , dupli-

catam habebit rationem quadrati BD ad quadratum NN ; hoc est, eam quam quadratum vv ad quadratum RR , in figura proportionali. Erit igitur & dicta prior summa quadratorum, à distantiiis particularum segmenti NN à plano EC , ad summam alteram quadratorum, à distantiiis particularum segmenti MM , ut qu. vv ad qu. RR . Eademque ratione ostendetur, summas quadratorum à distantiiis particularum in reliquis segmentis solidi $ABCD$, esse inter se in ratione quadratorum quæ fiunt à rectis in figura ovv , quæ basi cujusque segmenti respondent. Quare summa quadratorum, à distantiiis particularum omnium segmentorum solidi $ABCD$ à plano EC , erit ad summam quadratorum, à distantiiis particularum segmentorum totidem, maximo segmento æqualium, hoc est, cylindri vel prismatis BDS , eandem cum solido $ABCD$ basin altitudinemque habentis, sicut quadrata omnia rectarum vv , RR , QQ , &c. ad quadrata totidem maximo vv æqualia, hoc est, sicut solidum rotundum ovv circa axem OP , ad cylindrum $vv\Omega\Omega$, qui basin & altitudinem habeat eandem. Hanc vero rationem solidi ovv ad cylindrum $vv\Omega\Omega$, componi constat ex ratione planorum quorum conversione generantur, hoc est, ex ratione plani OPV , ad rectangulum $P\Omega$, & ex ratione distantiarum quibus horum planorum centra gravitatis absunt ab axe OP ; hoc est, & ex ratione $P\phi$ ad $P\Delta$. Et prior quidem harum rationum, nempe plani OPV ad rectangulum $P\Omega$, eadem est quæ solidi $ABCD$ ad cylindrum vel prismam BDS , hoc est, eadem quæ numeri particularum solidi $ABCD$, ad numerum particularum cylindri vel prismatis BDS . Altera vero ratio, nempe $P\phi$ ad $P\Delta$, est eadem, ex constructione, quæ spatii z ad rectangulum $BC\kappa$. Habebit itaque dicta summa quadratorum, à distantiiis omnium particularum solidi $ABCD$ à plano EC , ad summam quadratorum, à distantiiis omnium particularum cylindri vel prismatis BDS ab eodem plano, rationem eam quæ componitur ex ratione numeri particularum solidi $ABCD$, ad numerum particularum cylindri vel prismatis BDS , & ex ratione spatii z ad rectangulum $BC\kappa$: hoc est, rationem quam habet rectangulum z , multiplex per numerum particularum solidi $ABCD$, ad rectangulum $BC\kappa$, multiplex per numerum particularum cylindri vel prismatis BDS . Atqui quarta harum magnitudinum æqualis est secundæ; nempe rectangulum $BC\kappa$, multiplex per numerum particularum cylindri vel prismatis BDS , æquale summæ quadratorum, à distantiiis particularum ejusdem prismatis vel cylindri BDS à plano EC ; siquidem rectangulum idem $BC\kappa$, multiplex

per numerum particularum segmenti BND , æquatur quadratis distantiarum particularum ejusdem segmenti à plano EC^* . Ergo & tertia primæ æquabitur; nempe planum Z , multiplex per numerum particularum solidi $ABCD$, summæ quadratorum, à distantis particularum solidi ejusdem $ABCD$ à plano EC^* . quod erat demonstrandum.

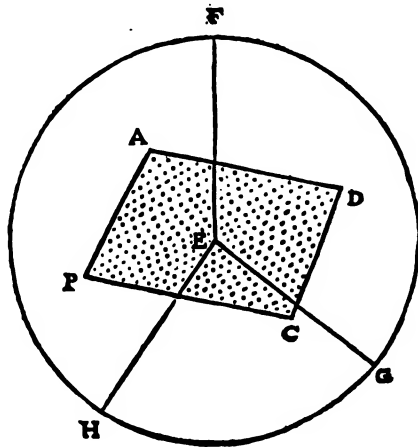
DE CENTRO
OSCILLATIONIS.
* Prop. 8. huj.

* Prop. 14. lib.
5. Eucl.

Notandum vero, quando solidum ABD rotundum est circa axem AC , fieri semper rectangulum BCK æquale quartæ parti quadrati BC ; quoniam subcentrica cunei, abscissi super circulo BD , plano per tangentem in B , nempe recta BK , æquatur $\frac{1}{4}$ radii BC . Vnde, si PV æqualis posita sit BC , sequitur, faciendo ut $P\Delta$ ad $P\Phi$ ita rectangulum BCK , hoc est, $\frac{1}{4}$ quadrati BC , hoc est, qu. $P\Delta$ ad planum aliud Z , fore hoc rectangulo $\Delta P\Phi$ æquale. Ac proinde tunc ipsum rectangulum $\Delta P\Phi$, multiplex secundum numerum particularum solidi ABD , æquari summæ quæsitæ quadratorum à perpendicularibus omnibus, quæ à particulis iisdem cadunt in planum EC .

PROPOSITIO XVI.

Figura quævis, siue linea fuerit, siue superficies, siue solidum; si aliter atque aliter suspendatur, agiteturque super axibus inter se parallelis, quique à centro gravitatis figura aqualiter distent, sibi ipsi isochrona est.



Proponatur magnitudo quævis, cujus centrum gravitatis E punctum, sitque primo suspensa ab axe, qui per F intelligitur hujus paginæ plano ad angulos rectos. Itaque idem planum erit & planum oscillationis. In quo si centro E , radio EF , describatur circumferentia FHG , sumptoque in illa puncto quovis, ut H , magnitudo secundò suspendi intelligatur ab axe in hoc puncto infixo, atque agitari, manente eodem oscillationis plano. Dico isochronam fore sibi ipsi agitatæ circa axem in F .

Intelligatur enim dividi magnitudo proposita in particulas minimas æquales. Itaque, quia in utraque illa suspensione idem manet oscillationis planum, respectu partium magnitudinis; manifestum est, si ab omnibus particulis, in quas divisa est magnitudo, perpendiculares cadere concipiantur in dictum oscillationis planum, illas utraque suspensione occurrere ipsi in punctis iisdem. Sint autem hæc puncta ea quæ apparent in spatio $A B C D$.

Quum igitur E sit centrum gravitatis magnitudinis propositæ, ipsaque proinde circa axem, qui per E punctum erectus est ad planum $A B C D$, quovis situ æquilibrium servet; facile perspicitur, quod si punctis omnibus ante dictis, quæ in spatio $A B C D$ signantur, æqualis gravitas tribuatur, eorum quoque omnium centrum gravitatis futurum est punctum E . Quod si vero, ut fieri potest, in puncta aliqua plures perpendiculares coincidunt, illa puncta quasi toties geminata intelligenda sunt, gravitatesque toties multiplices accipiendæ. Atque ita consideratorum, patet rursus centrum gravitatis esse E punctum.

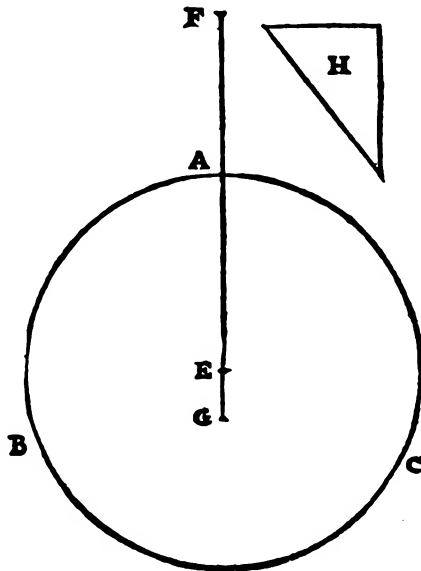
Porro summam quadratorum ab rectis, quæ ducuntur à dictis punctis omnibus ad punctum F , eandem esse patet cum summa quadratorum ab iis rectis, quæ à singulis particulis magnitudinis propositæ ducuntur perpendiculares in axem oscillationis per F transeuntem; quippe cum lineæ ipsæ, quarum quadrata intelliguntur, utrobique eandem habeant longitudinem. Similiter etiam, cum suspensio est ex axe per H , patet summam quadratorum ab rectis, quæ ab omnibus punctis, in spatio $A B C D$ signatis, ducuntur ad punctum H , eandem esse cum summa quadratorum, ab iis quæ, à particulis omnibus magnitudinis propositæ, ducuntur perpendiculares in axem oscillationis per H transeuntem. Ergo utroque casu, si summa quadratorum ab rectis quæ, à punctis omnibus prædictis, ducuntur ad puncta F vel H , dividatur per rectas $E F$ vel $E H$, multiplices secundum numerum particularum in quas magnitudo proposita divisa intelligitur, orietur ex applicatione hac longitudo penduli simplicis, quod magnitudini suspensæ ex F vel H isochronum sit. Est autem summa quadratorum utroque casu æqualis*; & rectæ quoque $E F$, $E H$, inter se æquales; & particularum idem numerus. Ergo, quum & applicatæ quantitates, & quibus illæ applicantur, utrobique æquales sint, etiam longitudines ex applicatione ortæ æquales erunt, hoc est, longitudines pendulorum isochronorum magnitudini propositæ suspensæ ex F vel ex H . Quare constat propositum.

* Prop. 11. huj.

PROPOSITIO XVII.

Dato plano, cujus multiplex per numerum particularum, in quas suspensa figura divisa intelligitur, æquetur quadratis omnium distantiarum ab axe oscillationis; si illud applicetur ad rectam, æqualem distantia inter axem oscillationis & centrum gravitatis suspensa magnitudinis, oriatur longitudo penduli simplicis ipsi isochroni.

Sit figura ABC , cujus centrum gravitatis E , suspensa ab axe qui, per F punctum ad planum quod conspicitur, erectus sit. Ponendoque divisam figuram in particulas minimas æquales, à quibus omnibus, in dictum axem, perpendiculares cadere intelligantur: esto, per superius ostensa, inventum planum H , cujus multiplex per nu-



merum dictarum particularum, æquetur quadratis omnibus dictarum perpendicularium. Applicatoque plano H ad rectam FE , fiat longitudo FG . Dico hanc esse longitudinem penduli simplicis, isochronas oscillationes habentis magnitudini ABC , agitatae circa axem per F .

Quia enim summa quadratorum, à distantibus ab axe F , applicata ad distantiam FE , multiplicem secundum partium numerum, facit longitudinem penduli simplicis isochroni *. Isti vero quadratorum summæ æquale ponitur planum H , multiplex per eundem particularum numerum. Ergo & planum H , multiplex per eundem particularum numerum, si applicetur ad distantiam FE , multiplicem

* Prop. 6. huj.

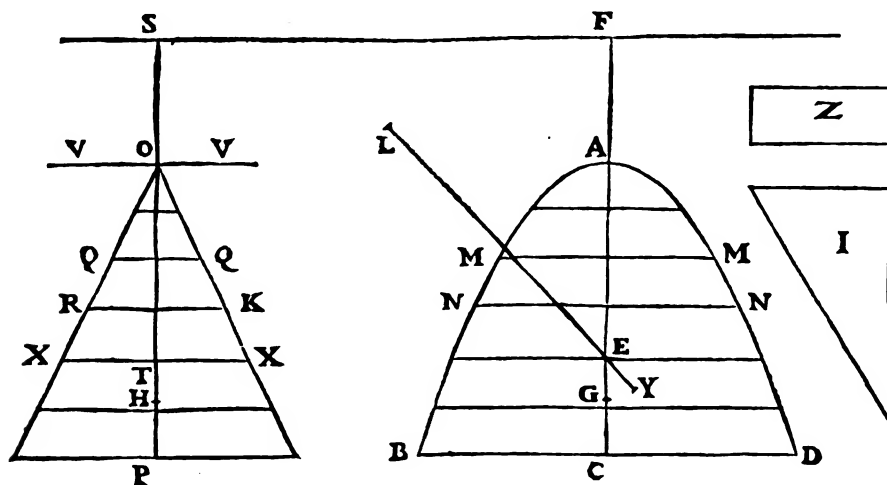
Q

secundum particularum numerum; sive, omiſſa communi multiplicitate, ſi planum H applicetur ad diſtantiā FE ; orietur quoque longitudo penduli ſimplicis iſochroni. Quam proinde ipſam longitudinem FG eſſe conſtat. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Si ſpatium planum, cujus multiplex ſecundum numerum particularum ſuſpenſa magnitudinis, æquetur quadratis diſtantiarum ab axe gravitatis, axi oſcillationis parallelo; id, inquam, ſpatium ſi applicetur ad rectam, æqualem diſtantiā inter utrumque dictorum axium, orietur recta æqualis intervallo, quo centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis ejuſdem magnitudinis.

Eſto magnitudo $ABCD$, cujus centrum gravitatis E ; quæque ſuſpenſa ab axe, qui per punctum F ad planum huius paginæ erectus intelligitur, habeat centrum oſcillationis G . Porro axi per F intelligatur axis alius, per centrum gravitatis E tranſiens, paralle-



lus. Diviſaque magnitudine cogitatu in particulas minimas æquales, ſit quadratis diſtantiarum, ab axe dicto per E , æquale planum I , multiplex nempe ſecundum numerum dictarum particularum; applicatoque plano I ad diſtantiā FE , fiat recta quædam. Dico eam æqualem eſſe intervallo EG , quo centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis magnitudinis $ABCD$.

Vt enim univerſali demonſtratione quod propoſitum eſt comprehendamus: intelligatur plana figura, magnitudini $ABCD$ analoga, ad latus adpoſita, OQP ; quæ nempe, ſecta planis horizontalibus iſdem cum magnitudine $ABCD$, habeat ſegmenta inter-

cepta inter bina quæque plana, in eadem inter se ratione cum segmentis dictæ magnitudinis, quæ ipsis respondent; sintque segmenta singula figuræ OQP , divisa in tot particulas æquales, quot continentur segmentis ipsis respondentibus in figura $ABCD$. Hæc autem intelligi possunt fieri, qualiscunque fuerit magnitudo $ABCD$, sive linea, sive superficies, sive solidum. Semper vero centrum gravitatis figuræ OQP , quod sit τ , eadem altitudine esse manifestum est cum centro gravitatis magnitudinis $ABCD$; ideoque, si planum horizontale, per F ductum, secet lineam centri figuræ OQP , velut hic in s , æquales esse distantias $s\tau$, FE .

Porro autem constat quadrata distantiarum, ab axe oscillationis F , applicata ad distantiam FE , multiplicem secundum numerum particularum, efficere longitudinem penduli isochroni *; quæ longitudo posita fuit FG . Illorum vero quadratorum summam, æqualem esse perspicuum est, quadratis distantiarum à plano horizontali per F , unà cum quadratis distantiarum à plano verticali FE , per axem F & centrum gravitatis E ducto *. Atqui quadrata distantiarum magnitudinis $ABCD$ à plano horizontali per F , æquantur quadratis distantiarum figuræ OQP ab recta sF . Quæ quadrata (si O sit punctum supremum figuræ OQP , & H centrum gravitatis cunei super ipsa abscissi, plano per rectam OV , parallelam sF) æqualia sunt rectangulo OTH & quadrato $s\tau$, multiplicibus secundum numerum particularum dictæ figuræ *, sive magnitudinis $ABCD$. Quadrata vero distantiarum magnitudinis $ABCD$ à plano FE , quantumcumque axis oscillationis F distet à centro gravitatis E , semper eadem sunt: quæ proinde putemus æquari spatio z , multiplici secundum numerum particularum magnitudinis $ABCD$.

Itaque quoniam quadrata distantiarum magnitudinis $ABCD$, ab axe oscillationis F , æquantur istis, quadrato nimirum $s\tau$, rectangulo OTH , & plano z , multiplicibus per numerum particularum ejusdem magnitudinis; si applicentur hæc omnia ad distantiam FE sive $s\tau$, orietur longitudo FG penduli isochroni magnitudini $ABCD$ *. Sed ex applicatione quadrati $s\tau$ ad latus suum $s\tau$, orietur ipsa $s\tau$, sive FE . Ergo reliqua EG est ea quæ oritur ex applicatione rectanguli OTH , & plani z , ad eandem $s\tau$ vel FE .

Quare superest ut demonstremus rectangulum OTH , cum plano z , æquari plano i . Tunc enim constabit, etiam planum i , applicatum ad distantiam FE , efficere longitudinem ipsi EG æqualem. Illud autem sic ostendetur. Rectangulum OTH , multiplex secundum numerum particularum figuræ OQP , sive magnitudinis AB

Q ij

* Prop. 6. huj.

* Prop. 47. lib. 1. Eucl.

* Prop. 9. huj.

* Prop. 6. huj.

DE CENTRO
OSCILLATIONIS.
*Prop. 10. huj.

* Prop. 47. lib.
1. Eucl.

CD , æquatur quadratis distantiarum figuræ ab recta $x\tau^*$, quæ per centrum gravitatis τ ducitur ipsi $s\epsilon$ parallela; ac proinde etiam quadratis distantiarum magnitudinis $ABCD$, à plano horizontali $\kappa\kappa$, ducto per centrum gravitatis ϵ ; cum distantia utrobique sint eadem. At vero planum z , similiter multiplex, æquale positum fuit quadratis distantiarum magnitudinis $ABCD$ à plano verticali $\epsilon\epsilon$. Ac patet quidem quadrata hæc distantiarum à plano $\epsilon\epsilon$, una cum dictis quadratis distantiarum à plano horizontali per ϵ , æqualia esse quadratis distantiarum ab axe gravitatis per ϵ , qui sit axi ϵ parallelus*. Itaque rectangulum $o\tau\eta$ una cum plano z , multiplicia secundum numerum particularum magnitudinis $ABCD$, æqualia erunt quadratis distantiarum ejusdem magnitudinis à dicto axe per ϵ . Sed & planum i , multiplex secundum eundem particularum numerum, æquale positum fuit iisdem distantiarum quadratis. Ergo planum i æquale est rectangulo $o\tau\eta$ & plano z simul sumptis. quod ostendendum supererat.

Hinc rursus manifestum fit, quod propositione 16 demonstratum fuit; nempe magnitudinem quamlibet, si aliter atque aliter suspendatur atque agitetur, ab axibus parallelis, qui à centro gravitatis suæ æqualiter distent, sibi ipsi isochronam esse.

Sive enim magnitudo $ABCD$ suspendatur ab axe ϵ , sive ab axe L illi parallelo; patet eadem utrobique esse quadrata distantiarum ab axe per ϵ , qui sit axibus ϵ vel L parallelus. Vnde & planum i , cujus multiplex, secundum numerum particularum, æquatur quadratorum summæ, utroque casu idem erit. Hoc vero planum, applicatum ad distantiam centri gravitatis ab axe oscillationis, quæ utroque casu eadem ponitur, efficit distantiam qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis; Ergo etiam hæc distantia utroque casu eadem erit. Velut si, facta suspensione ex L , fuerit dicta distantia $\epsilon\gamma$, erit ipsa æqualis $\epsilon\zeta$; & tota γL æqualis $\zeta\epsilon$; adeoque, in suspensione utraque, idem pendulum simplex isochronum fit magnitudini $ABCD$.

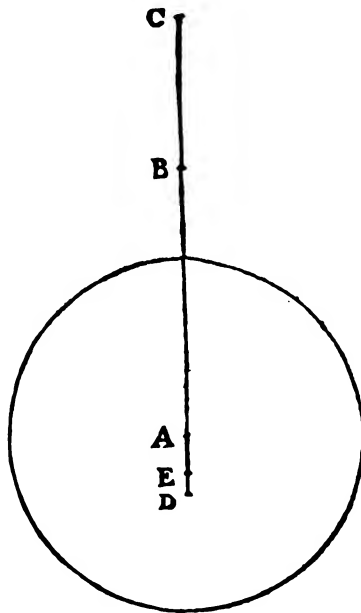
PROPOSITIO XIX.

SI magnitudo eadem, nunc brevius nunc longius suspensa, agitetur; erunt, sicut distantia axium oscillationis à centro gravitatis inter se, ita contraria ratione distantia centrorum oscillationis ab eodem gravitatis centro.

Sit magnitudo, cujus centrum gravitatis A , suspensa primum atque agitata ab axe in B , deinde vero ab axe in C ; sitque in prima

suspensione centrum oscillationis D, in posteriori vero centrum oscillationis E. Dico esse ut B A ad C A ita E A ad D A.

DE CENTRO
OSCILLA-
TIONIS.



Quum enim, in suspensione ex B, efficiatur distantia A D, quae nempe centrum oscillationis inferius est centro gravitatis, applicando ad distantiam B A spatium quoddam, cujus multiplex secundum numerum particularum minimarum æqualium, in quas magnitudo divisa intelligitur, æquatur quadratis distantiarum ab axe per A, parallelo axi in B*; erit proinde rectangulum B A D dicto spatio æquale. Item, in suspensione ex C, quum fiat distantia A E, applicando idem dictum spatium ad distantiam C A; erit & rectangulum C A E eidem spatio æquale. Itaque æqualia inter se rectangula B A D, C A E; ac proinde ratio B A ad C A eadem quæ A E ad A D. quod erat demonstrandum.

* Prop. præced.

Hinc patet, dato pendulo simplici, quod magnitudini suspensæ isochronum sit in una suspensione, datoque ejus centro gravitatis; etiam in alia omni suspensione, longiori vel breviori, dummodo idem maneat planum oscillationis, longitudinem penduli isochroni datam esse.

PROPOSITIO XX.

Centrum Oscillationis & punctum suspensionis inter se convertuntur.

In figura superiori, quia, posita suspensione ex B, centrum oscillationis est D; etiam invertendo omnia, ponendoque suspen-

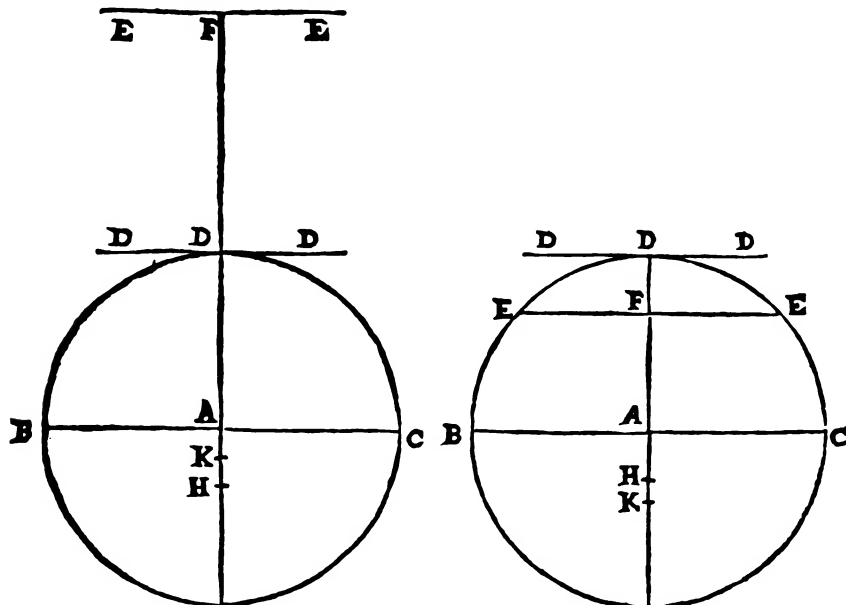
Q. iij

fionem ex D, erit tunc centrum oscillationis B. Hoc enim ex ipsa propositione præcedenti manifestum est.

PROPOSITIO XXI.

Quomodo in figuris planis centra oscillationis inveniuntur.

Intellectis quæ hæcenus demonstrata sunt, facile jam erit in plerisque figuris, quæ in Geometria considerari consueverunt, definire oscillationis centra. Atque ut de planis figuris primum dicamus; duplicem in iis oscillationis motum supra definivimus; nempe, vel circa axem in eodem cum figura plano jacentem, vel circa eum qui ad figuræ planum erectus sit. Quorum priorem vocavimus agitationem in planum, alterum agitationem in latus.



Quod si priore modo agitetur, nempe circa axem in eodem plano jacentem, sicut figura B C D circa axem E F; hic, si cuneus super figura intelligatur abscissus, plano quod ita secet planum figuræ, ut intersectio, quæ hic est D D, sit parallela oscillationis axi; deturque distantia centri gravitatis figuræ ab hac intersectione, ut hic A D; itemque subcentrica cunei dicti super eadem intersectione, quæ hic sit D H. Habebitur centrum oscillationis K, figuræ B D C, applicando rectangulum D A H ad distantiam F A; quoniam ex applicatione hac orietur distantia A K, qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis. Est enim rectangulum D A H, multiplex secundum numerum particularum figuræ B C D, æquale quadratis distantiarum ab recta B A C, quæ per centrum gravi-

tatis A parallela ducitur axi oscillationis EF *. Quare, applicando idem rectangulum ad distantiam FA , orietur distantia AK , qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis A *.

Hinc manifestum est, si axis oscillationis sit DD , fieri centrum oscillationis H punctum; adeoque longitudinem DH , penduli simplicis isochroni figuræ BCD , esse tunc ipsam subcentricam cunei, abscissi plano per DD , super ipsam DD . Quod unum ab aliis ante animadversum fuit, non tamen demonstratum.

Quomodo autem centra gravitatis cunctorum super figuris planis inveniantur, persequi non est instituti nostri, & jam in multis nota sunt. Velut, quod si figura BCD sit circulus, erit DH æqualis $\frac{1}{2}$ diametri. Si rectangulum, erit DH $\propto \frac{1}{2}$ diametri. Vnde & ratio apparet cur virga, seu linea gravitate prædita, altero capite suspensa, isochrona sit pendulo longitudinis subsesquialteræ. Considerando nempe lineam ejusmodi, ac si esset rectangulum minimæ latitudinis.

Quod si figura triangulum fuerit, vertice sursum converso, sit DH $\frac{1}{3}$ diametri. Si deorsum, $\frac{1}{2}$ diametri.

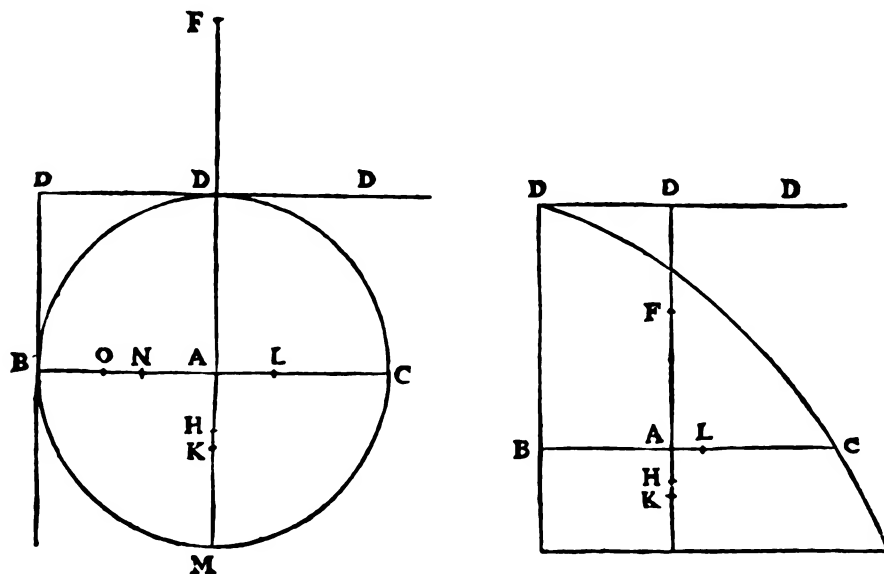
Quod autem propositione 16 demonstratum fuit, id ad hujusmodi figuræ planæ motum ita pertinere sciendum. Nempe, si aliam atque aliam positionem demus figuræ BCD , invertendo eam circa axem BAC , ut vel horizonti parallela jaceat, vel oblique inclinetur, manente eodem agitationis axe FE , etiam longitudo penduli isochroni FK eadem manebit. Hoc enim ex propositione illa manifestum est.

Porro quando figura plana, circa axem ad planum figuræ erectum, agitur, quam vocavimus agitationem in latus; velut si figura BCD moveatur circa axem, qui per punctum F intelligitur ad planum DBC erectus; hic jam præter cuneum super figura, qui abscinditur plano ducto per DD , tangentem figuram in puncto summo, alter quoque considerandus cuneus, qui abscinditur plano per BD , tangentem figuram in latere, quæque tangenti DD sit ad rectos angulos. Oportetque dari, præter figuræ centrum gravitatis A , subcentricamque HD cunei prioris, etiam subcentricam LB cunei posterioris. Ita enim nota erunt rectangula DAH , BAL , quæ simul sumpta faciunt hic spatium applicandum, quod deinceps etiam Rectangulum oscillationis vocabitur. Quod nempe, applicatum ad distantiam FA , dabit distantiam AK , qua centrum oscillationis K inferius est centro gravitatis A .

Si vero FA sit axis figuræ BCD , potest, pro cuneo abscisso per

DE CENTRO
OSCILLA-
TIONIS.

BD super figura tota, adhiberi cuneus super figura dimidia DBM abscissus plano per D M . Nam, si cunei hujus subcentrica super DM sit O A , distantia vero centri gr. figuræ planæ DBM ab eadem DM sit N A , æquale esse constat rectangulum O A N rectangulo B A L *. Itaque rectangulum O A N , additum rectangulo D A H , constituet quoque planum applicandum ad distantiam F A , ut fiat distantia A K .



Et horum quidem manifesta est demonstratio ex præcedentibus, quippe cum rectangula DAH , BAL , vel DAH , OAN , multiplicia secundum numerum particularum figuræ, æqualia sint quadratis distantiarum à centro gravitatis A ; sive, quod idem hic est, ab axe gravitatis axi oscillationis parallelo; ac proinde rectangula dicta, ad distantiam FA applicata, efficiant longitudinem intervalli AK *.

* Prop. 18. huj.

Centrum Oscillationis Circuli.

Et in circulo quidem rectangula DAH , BAL , inter se æqualia esse liquet, simulque efficere semissem quadrati à semidiametro. Vnde, si fiat ut FA ad semidiametrum AB , ita hæc ad aliam, ejus dimidium erit distantia AK , à centro gravitatis ad centrum oscillationis. Si igitur circulus ab axe D , in circumferentia sumpto, agitur, erit DK æqualis tribus quartis diametri DM .

Ad hunc modum & in sequentibus figuris planis centra oscillationis quæfivimus, quæ simpliciter adscripsisse sufficiet. Nempe,

Centrum

Centrum oscillationis Rectanguli.

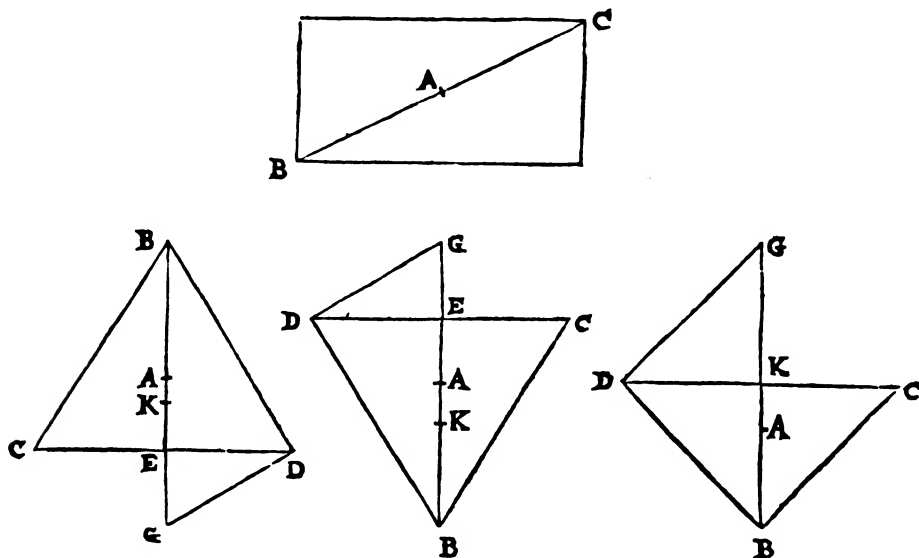
DE CENTRO
OSCILLA-
TIONIS.

In rectangulo omni, ut $C B$, spatium applicandum, five rectangulum oscillationis, invenitur æquale tertiæ parti quadrati à semidiagonio $A C$. Vnde sequitur, si rectangulum ab aliquo angulorum suspendatur, motuque hoc laterali agitetur, pendulum illi isochronum esse $\frac{2}{3}$ diagonii totius.

Centrum oscillationis Trianguli isoscelis.

In triangulo isoscele, cujusmodi $C B D$, spatium applicandum æquatur parti decimæ octavæ quadrati à diametro $B E$, & vigesimæ quartæ quadrati baseos $C D$. Vnde, si ab angulo baseos ducatur $D G$, perpendicularis super latus $D B$, quæ occurrat productæ diametro $B E$ in G ; sitque A centrum gravitatis trianguli; divisoque intervallo $G A$ in quatuor partes æquales, una earum $A K$ apponatur ipsi $B A$; erit $B K$ longitudo penduli isochroni, si triangulum suspendatur ex vertice B . Cum autem ex puncto mediæ basis E suspenditur, longitudo penduli isochroni $E K$ æquabitur dimidiæ $B G$.

Atque hinc liquet, triangulum isosceles rectangulum, si ex puncto mediæ basis suspendatur, isochronum esse pendulo longitudinem diametro suæ æqualem habenti. Similiterque, si suspendatur ab angulo suo recto, eidem pendulo isochronum esse.


Centrum oscillationis Parabola.

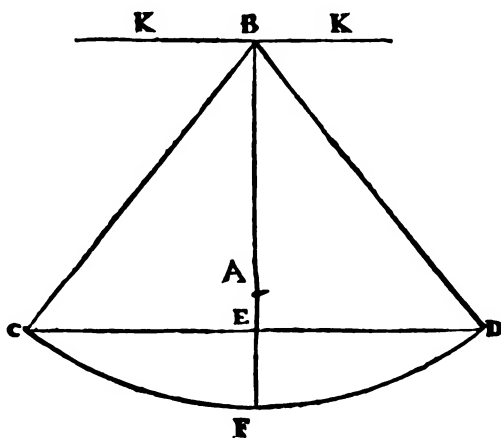
In parabolæ portione recta, spatium applicandum æquatur $\frac{11}{175}$ quadrati axis, una cum quinta parte quadrati dimidiæ basis. Cum-

R

que parabola ex verticis puncto suspensa est, invenitur penduli isochroni longitudo $\frac{1}{2}$ axis, atque insuper $\frac{1}{2}$ lateris recti. Cum vero ex puncto mediæ basis suspenditur, erit ea longitudo $\frac{1}{2}$ axis, & insuper $\frac{1}{2}$ lateris recti.

Centrum oscillationis Sectoris circuli.

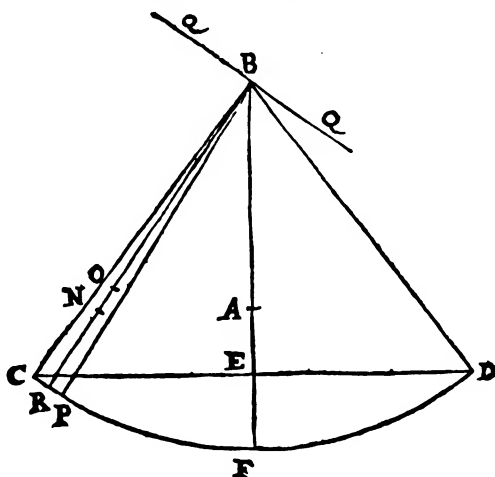
In circuli sectore BCD , si radius BC vocetur r : semi arcus CF , p : semisubtensa CE , b : fit spatium applicandum æquale $\frac{1}{2} rr - \frac{4bbrr}{9rr}$, hoc est, dimidio quadrati BC , minus quadrato BA ; ponendo



A esse centrum gravitatis sectoris. Tunc enim $BA \propto \frac{1}{3} \frac{b^2}{r}$. Si autem suspendatur sector ex B , centro circuli sui, fit pendulum ipsi isochronum $\frac{1}{4} \frac{r}{b}$, hoc est, trium quartarum rectæ, quæ sit ad radium BF ut arcus CFD ad subtensam CD . Hæc autem inveniuntur cognitis subcentricis cuneorum; tum illius qui super sectore toto abscinditur, plano ducto per BK parallelam subtensæ CD , cujus cunei subcentricam super BK invenimus esse $\frac{1}{3} r - \frac{1}{3} a + \frac{1}{3} \frac{r^2}{a}$, vocando a sinum versum BF ; tum illius qui super dimidio sectore BF abscinditur plano per BF , cujus nempe cunei subcentricam super BF invenimus $\frac{1}{3} b - \frac{1}{3} \frac{b^2}{a} + \frac{1}{3} \frac{r^2}{a}$.

Sed & alia via, sectoris centrum oscillationis, facilius invenitur, quæ est hujusmodi. Intelligatur sectoris BCD pars minima sector BCP , qui trianguli loco haberi potest. Quadrata autem, à distantiiis particularum ejus à puncto B , æqualia sunt quadratis distantiarum ab recta BR , bifariam sectorem dividente, una cum quadratis distantiarum ab recta BQ , quæ ipsi BR est ad angulos rectos. Sed, horum quadratorum ad illa, ratio quavis data est major, quoniam angulus CBP minimus; ideoque illa pro nullis habenda sunt.

Positâ vero $B O$ duarum tertiarum $B R$, hoc est, posito O centro DE CENTRO
OSCILLA-
TIONIS. gravitatis trianguli $B C P$; & $B N$ trium quartarum $B R$; ut nempe N sit centrum gravitatis cunei, super triangulo $B C P$ abscissi plano per $B Q$. His positis, constat quadrata, à distantis particularum trianguli $B C P$ ab recta $B Q$, æquari rectangulo $N B O$ multiplici secundum particularum ejusdem trianguli numerum. Itaque rectangulum $N B O$, ita multiplex, æquale censendum quadratis distantiarum à puncto B particularum trianguli $B C P$. Sunt autem quadrata



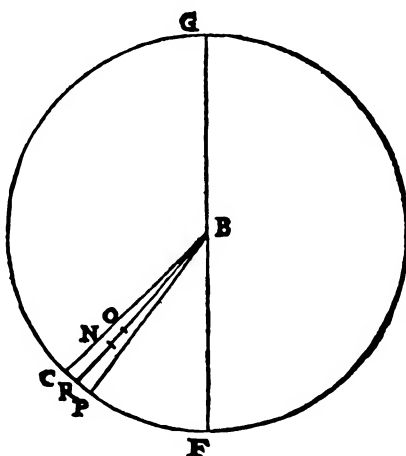
distantiarum harum, ad quadrata distantiarum totius sectoris $B C D$, sicut sector $B C P$ ad sectorem $B C D$, hoc est, sicut numerus particularum sectoris $B C P$, ad numerum particularum sectoris $B C D$; hoc enim facile intelligitur, eo quod sector $B C D$ dividatur in sectores qualis $B C P$. Ergo rectangulum $N B O$, multiplex secundum numerum particularum sectoris $B C D$, æquale erit quadratis distantiarum particularum ejus à puncto B . Ideoque rectangulum $N B O$, applicatum ad $B A$, distantiam inter suspensionem & centrum gravitatis sectoris, dabit longitudinem penduli isochroni, cum sector ex B suspenditur *. Est autem rectangulum $N B O \propto \frac{1}{2} r r$: distantia autem $B A$, ut jam ante diximus, $\propto \frac{1}{3} \frac{b}{p} r$. Vnde, facta applicatione, oritur $\frac{1}{4} \frac{p}{b}$, longitudo penduli isochroni, ut ante quoque inventa fuit. * Prop. 17. huj.

Centrum oscillationis Circuli, aliter quam supra.

Eodem modo etiam simplicissime, in circulo, centrum oscillationis invenire licet. Sit enim circulus $G C F$, cujus centrum B ; sectorque in eo minimus intelligatur $B C P$, sicut ante in sectore $B C D$.

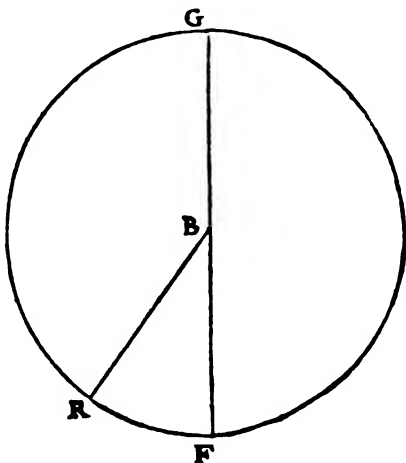
R ij

Cum igitur, secundum modo exposita, quadrata, à distantii particularum sectoris BCP ad centrum B , æquantur rectangulo NBO , hoc est, dimidio quadrato radii, multiplici secundum sectoris ipsius particularum numerum; circulus autem ex ejusmodi sectoribus componatur; erunt proinde quadrata, à distantii particularum circuli totius ad centrum B , æqualia dimidio quadrato radii, multiplici secundum numerum earundem circuli particularum.



Est autem B centrum gravitatis circuli. Ergo dictum dimidium quadratum radii, hic erit spatium applicandum distantiae inter suspensionem & centrum B , ut habeatur intervallum, quo centrum oscillationis inferius est ipso centro B *. quod & supra ita se habere ostendimus.

Centrum oscillationis Peripheria circuli.



Facilius etiam, centrum oscillationis circumferentiae circuli, hoc

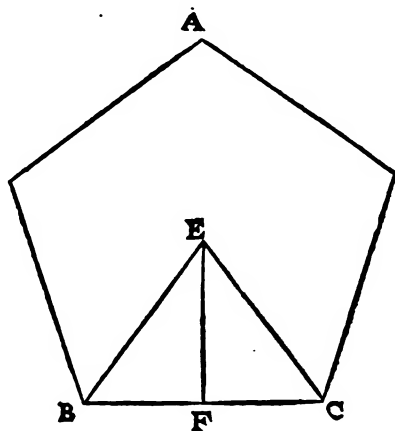
pacto reperitur. Esto enim circumferentia descripta centro B, ra-
 dio B R. Quadratum igitur B R, multiplex secundum numerum
 particularum in quas circumferentia divisa intelligitur, æquatur
 quadratis à distantiiis omnium earum particularum ad centrum B.
 Quare quadratum B R erit hic spatium applicandum *. Patetque
 hinc, si suspensio sit ex G, puncto circumferentiæ, penduli iso-
 chroni longitudinem æquari diametro G F.

DE CENTRO
 O S C I L L A -
 T I O N I S.

* Prop. 18. huj.

Centrum oscillationis Polygonorum ordinatum.

Haud absimiliter & polygono cuivis ordinato, ut A B C, pendu-
 lum isochronum invenitur. Fit enim, spatium applicandum, æquale
 semissi quadrati perpendicularis ex centro in latus polygoni, una



cum vigesima quarta parte quadrati lateris. At, si perimetro poli-
 goni pendulum isochronum quærat, fit spatium applicandum
 æquale quadrato perpendicularis à centro in latus, cum duodeci-
 ma parte quadrati lateris.

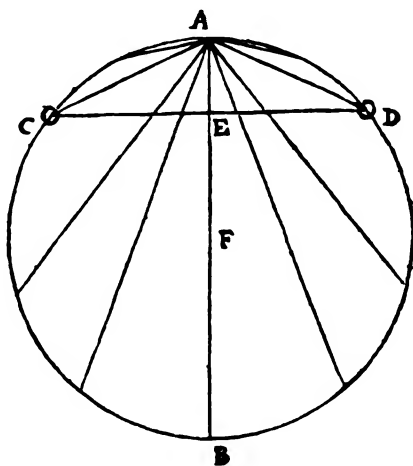
Loci plani & solidi usus in hac Theoria.

Est præterea & Locorum contemplatio in his non injucunda.
 Vt si propositum sit, dato puncto suspensionis A, & longitudine
 A B, invenire locum duorum ponderum æqualium C, D, æquali-
 ter ab A & à perpendiculari A B distantium, quæ agitata circa axem
 in A, perpendicularem plano per A C D, isochrona sint pendulo
 simplici longitudinis A B.

Ponatur A B $\propto a$, ductâque C D, quæ secet A B ad angulos rectos
 in E, sit A E indeterminata $\propto x$: E C vel E D $\propto y$. Ergo quadra-
 tum A C $\propto x x + y y$. Hoc vero multiplex secundum numerum
 particularum ponderum C, D, quæ hic minima intelliguntur,
 æquatur quadratis distantiarum earundem particularum ab axe

suspensionis A. Ergo quadratum AC, sive $xx + yy$, applicatum ad distantiam AE, quæ nempe est inter axem suspensionis & centrum gravitatis ponderum C, D, efficiet $\frac{xx+yy}{x}$, longitudinem penduli isochroni*; quam propterea oportet æqualem esse AB sive a.

*Prop 17. huj.



Itaque $\frac{xx+yy}{x} \approx a$. Et $yy \approx ax - xx$. Vnde patet, locum punctorum C & D, esse circumferentiam circuli, cujus centrum F, ubi AB bifariam dividitur, radius autem $\approx \frac{1}{2} a$, sive FA. Ergo, ubicunque in circumferentia ACBD duo pondera æqualia, æqualiter ab A distantia, ponentur, ea, ex A agitata, isochrona erunt pendulo longitudinem habenti æqualem diametro AB.

Atque hinc manifestum quoque, & circumferentiam ACBD, si gravitas ei tribuatur, & quamlibet ejus portionem, æqualiter in A vel B divisam, & ab axe per A suspensam, eidem pendulo AB isochronam esse.

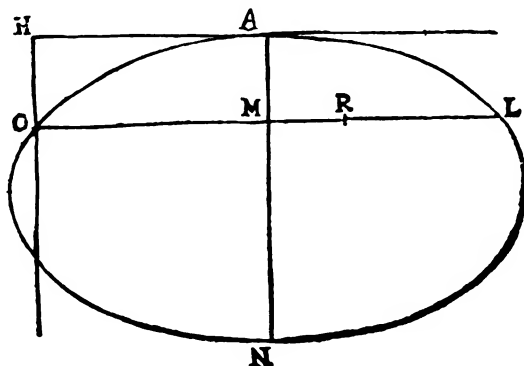
Loci vero solidi exemplum esto hujusmodi. Sit AN linea inflexilis sine pondere. Propositumque sit, ad punctum in ea acceptum, ut M, affigere ipsi ad angulos rectos lineam, seu virgam, pondere præditam OML, ad M bifariam divisam, cujus in latus agitatæ oscillationes, ex suspensione A, isochronæ sint pendulo simplici longitudinis AN.

Ducatur OH parallela AN, & AH parallela OM, & sit OR æqualis $\frac{1}{2}$ OL. Itaque cunei super recta OL, abscissi plano per OH ducto, subcentrica erit OR. Sed cunei alterius super eadem OL, abscissi plano per rectam AH, (est autem cuneus hic nihil aliud quam rectangulum) subcentrica erit ipsa AM. Quare rectangulum illud, quod supra Oscillationis vocavimus, erit solum rectangulum OMR, quod nempe, applicatum ad longitudinem AM, dabit distantiam centri oscillationis lineæ OL, ex A suspensæ, infra punctum M.

HOROLOG. OSCILLATOR. 135

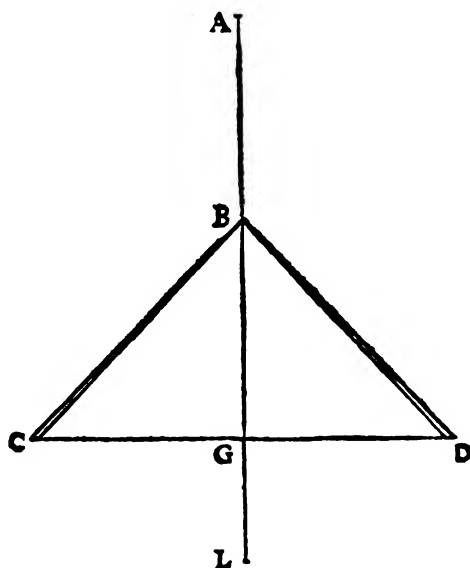
DE CENTRO
OSCILLA-
TIONIS.

Sit jam $AN \propto a$: $AM \propto x$: MO vel $ML \propto y$. Est ergo rectan-
gulum $OMR \propto \frac{1}{3}yy$. quo applicato ad AM , fit $\frac{1}{3}\frac{yy}{x}$. quæ longitu-
do itaque ipsi MN æqualis esse debet, cum velimus centrum of-
cillationis virgæ OL esse in N . Fit ergo æquatio $\frac{1}{3}\frac{yy}{x} + x \propto a$. Vnde
 $y \propto \sqrt{3ax - 3xx}$. Quod significat puncta O & L esse ad Ellipsin,
cujus axis minor AN ; latus rectum vero, secundum quod possunt
ordinatim ad axem hunc applicatæ, ipsius AN triplum.



Hinc vero manifestum fit, cum omnis virga ipsi OL parallela, &
ad Ellipsin hanc terminata, oscillationes isochronas habeat pen-
dulo simplici AN , etiam totum Ellipseos planum, ex A suspen-
sum & in latus agitarum, ipsi AN pendulo isochronum fore. Sed
& partem Ellipseos quamlibet, quæ lineis una vel duabus, ad AN
perpendicularibus, abscinderur.

Cæterum adscribemus & aliud loci plani exemplum, in quo non-
nulla notatu digna occurrunt.

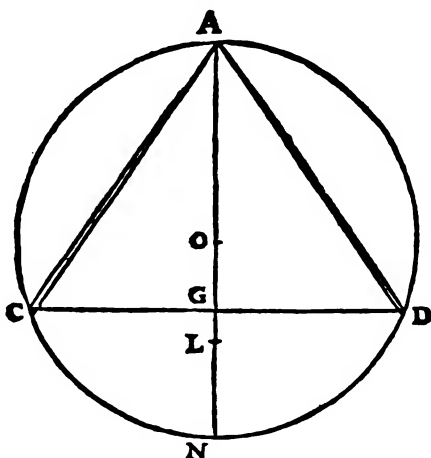


Sit virga AB ponderis expers, suspensa ex A ; oporteatque, ad da-

tum in ea punctum B, affigere triangula duo paria, & paribus angulis ab axe AB recedentia, quorum anguli ad B minimi, sive infinite parvi existimandi, quæque, ita suspensa ab A, oscillationes isochronas faciant pendulo simplici datæ longitudinis AL.

Hic, ducta CG perpendiculari in BG, & ponendo $AB \propto a$; $AL \propto b$; $BG \propto x$; $CG \propto y$: invenitur æquatio $y \propto \sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$. ex qua patet, bases triangulorum C, & D, quæ bases hic ut puncta considerantur, esse ad circuli circumferentiam; quia nempe habetur terminus simplex - xx.

Licet autem hic animadvertere, quod si a sit nihilo æqualis, hoc est, si punctum, ubi affiguntur trianguli BC, BD, sit idem cum puncto A; tum futura sit æquatio $y \propto \sqrt{\frac{4}{3}bx - xx}$. Ac proinde, hoc casu, si sumatur $AO \propto \frac{2}{3}b$, hoc est, $\propto \frac{2}{3}AL$, centroque O per A circulus describatur ADN; erunt bases triangulorum AC,

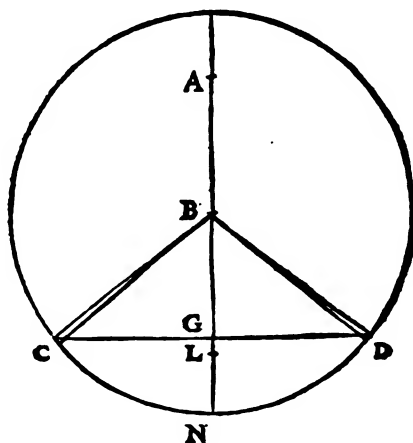


AD, ad illius circumferentiam. Cum igitur quælibet duo triangula acutissima, quæ ex A ad circumferentiam ACND constituuntur, magnitudine & situ sibi respondentia, centrum oscillationis habeant punctum L, positâ $AL \propto \frac{3}{4}$ diametri AN; cumque circulus totus ex ejusmodi triangulorum paribus componatur; uti & portio ejus quælibet, ut ACND, latera AC, AD æqualia habens; manifestum est, tum circuli totius, tum portionis qualem diximus, centrum oscillationis esse in L.

Rursus, si in æquatione inventa ponatur $\frac{2}{3}a \propto \frac{4}{3}b$, seu $2a \propto b$; hoc est, si triangula affigi intelligantur in B, quod longitudinem AL secet bifariam, erit $y \propto \sqrt{2aa - xx}$. quæ æquatio docet, quod si centro B, radio qui possit duplum BA, circumferentia describatur, ea erit locus basium triangulorum acutissimorum BC, BD, quorum

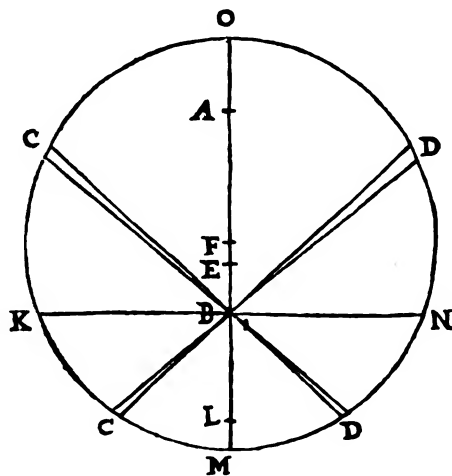
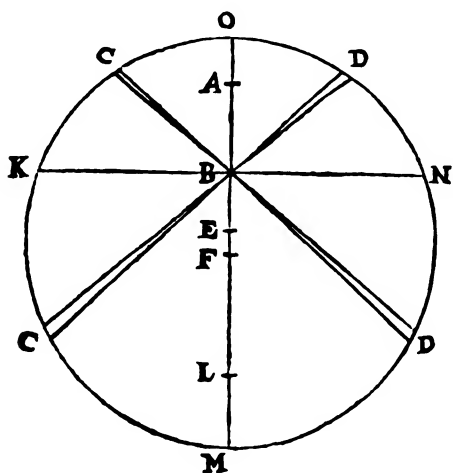
quorum nempe, ex A suspensorum, centrum oscillationis erit L punctum. Cumque & circulus totus, & sector ejus quilibet, axem habens in recta AL, ex hujusmodi triangulorum paribus componatur, manifestum est & horum, ex A suspensorum, centrum oscillationis esse punctum L.

DE CENTRO
OSCILLA-
TIONIS.



Adeoque quilibet circuli sector, suspensus à puncto quod distet, à centro circuli sui, semisse lateris quadrati circulo inscripti, pendulum isochronum habebit toti eidem lateri æquale. Atque ita, hoc uno casu, absque posita dimensione arcus, pendulum sectori isochronum invenitur.

Porro, ad universalem constructionem æquationis primæ, $y \propto \sqrt{2ab - 2aa - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}bx - xx}$, dividatur AL bifariam in E, & adponatur ad BE pars sui tertia EF; eritque F centrum describendi circuli; radius autem FO æqualis sumendus ei, quæ potest duplum differentię quadratorum AE, EF.

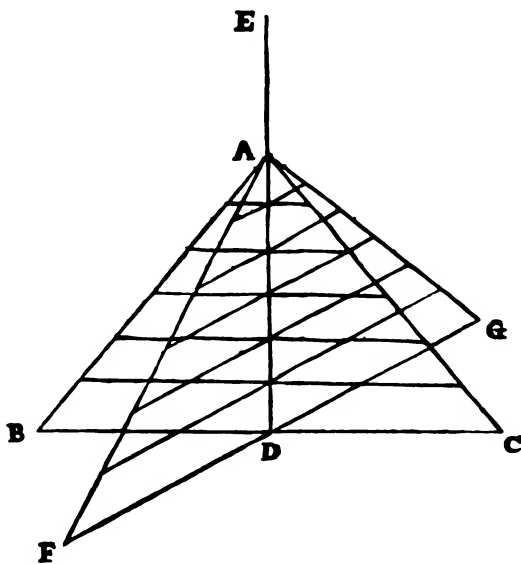


Si itaque, ex puncto B, ad descriptam circumferentiam triangu-
la duo paria acutissima constituentur, ut BC, BD; illorum, ex A

S

suspenforum, centrum oscillationis erit L . Quare & portionis cuiuslibet descripti circuli, cuius portionis vertex sit in B , axis vero in recta AL , quales sunt utraque $CB D$; posita suspensione ex A ; centrum oscillationis idem punctum L esse constat. Atque adeo etiam circuli segmentorum $K O N$, $K M N$, quæ facit recta $K B N$ perpendicularis ad $A B$.

Et hæc quidem de motu laterali planorum, ac linearum, animadvertisse sufficiat. Quibus hoc tantum addimus; inventis centris oscillationis figurarum rectarum, seu quæ æqualiter ad axem utrinque constitutæ sunt; ut trianguli isoscelis, vel parabolicæ sectionis rectæ; etiam obliquarum, quæ velut luxatione illarum efficiuntur, ut trianguli scaleni, & parabolæ non rectæ, centra oscillationis haberi. Vt si, exempli gratia, triangulum BAC isosceles, cuius axis AD , à puncto E suspensum intelligatur; sit vero & aliud triangulum scalenum FAG , axem eundem habens AD , & basin FG æqualem basi BC ; etiam hoc triangulum, ex E suspensum, priori BAC isochronum esse dico.



Quia enim virga, seu linea gravis, FG , affixa virgæ sine pondere ED in D , situ obliquo, suspensaque ex E , isochrona est virgæ BC , similiter in D affixæ*; idemque evenit in virgis cæteris trianguli utriusque, quæ axem AD secant in iisdem punctis, atque inter se æquales sunt: necesse est tota triangula, quæ ex lineis, seu virgis iisdem composita intelligi possunt, isochrona esse. In aliis figuris similis est demonstratio.

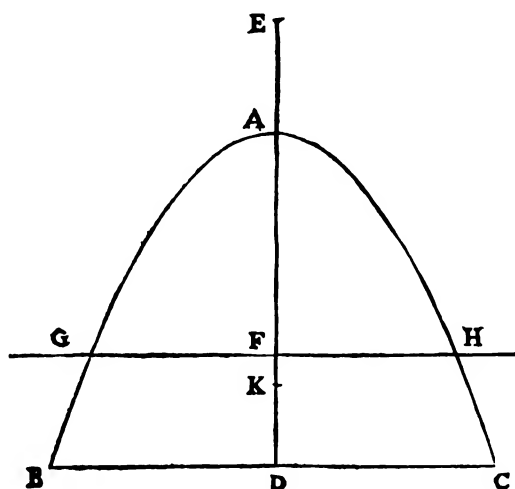
*Prop 16. huj.

PROPOSITIO XXII.

DE CENTRO
OSCILLA-
TIONIS.

Quomodo, in solidis figuris, oscillationis centra inveniantur.

In solidis porro figuris facile quoque, per ante demonstrata, centrum oscillationis invenire licebit. Si enim sit solidum ABC , suspensum ab axe, qui, per punctum E , intelligitur hujus paginae plano ad rectos angulos; centrum autem gravitatis sit F : ductis jam per F planis EFD , $G FH$, quorum posterius sit horizonti parallelum, alterum vero per axem E transeat; inventisque, per propositionem 14, summis quadratorum à distantiiis particularum solidi ABC à plano $G FH$, itemque à plano EFD ; hoc est, inventis rectangulis utrisque, quæ, multiplicia secundum numerum dictarum particularum, æqualia sint dictis quadratorum summis; rectangula hæc applicata ad distantiam EF , qua nempe axis suspensionis distat à centro gravitatis, dabunt intervallum FK , quo centrum agitationis K inferius est centro gravitatis F . Hoc enim patet ex propositione 18. Dabimus autem & horum exempla aliquot.



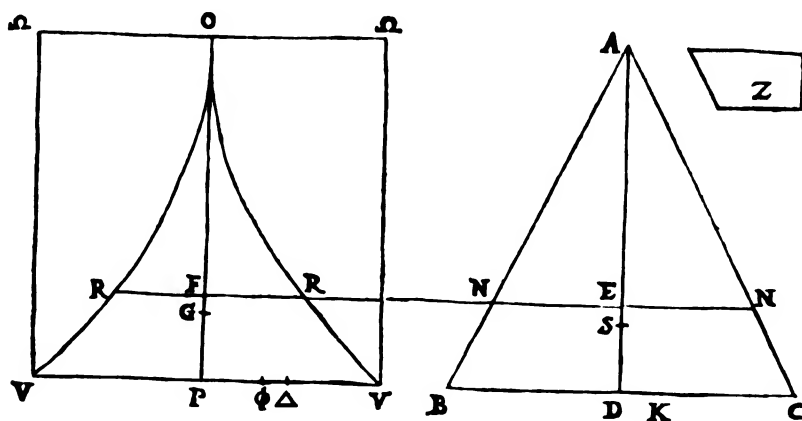
Centrum oscillationis in Pyramide.

Sit primum ABC pyramis, verticem habens A , axem AD , basin vero quadratum, cujus latus BC . ponaturque agitari circa axem qui, per verticem A , sit hujus paginae plano ad angulos rectos.

Hic figura plana proportionalis ovv , à latere adponenda, secundum propositionem 14, constabit ex residuis parabolicis opv , quæ nempe supersunt, cum, à rectangulis onp , auferuntur semiparabolæ ovn , verticem habentes o .

S ij

Sicut enim inter se sectiones pyramidis BC , NN , ita quoque rectæ vv , RR , ipsis in figura plana respondentes. & sicut centrum gravitatis E distat, à vertice pyramidis, tribus quartis axis AD , ita quoque centrum gravitatis F , figuræ ovv , distabit tribus quartis diametri OP à vertice O .



Intellecto porro horizontali plano NE , per centrum gravitatis pyramidis ABC , quod idem figuram ovv secet secundum RF ; inventâque subcentricâ cunei, super figura ovv abscissi plano per $O\Omega$, quæ subcentrica sit OG , (est autem $\frac{1}{3}$ diametri OP) erit rectangulum OFG , multiplex per numerum particularum figuræ ovv , æquale quadratis distantiarum ab recta RF *, ac proinde quoque quadratis distantiarum à plano NE , particularum solidi ABC . Fit autem rectangulum OFG æquale $\frac{1}{10}$ quadrati OP , vel quadrati AD .

Deinde, ad inveniendam summam quadratorum à distantiiis à plano AD , noscenda primo subcentrica cunei, super quadrata basi pyramidis BC abscissi, plano per rectam quæ in B intelligitur axi A parallela; quæ subcentrica sit BK ; estque $\frac{1}{3}$ BC . Noscenda item distantia centr. gr. dimidiæ figuræ OPv ab OP ; quæ sit ΦP ; estque $\frac{1}{10}$ Pv . Inde, divisâ bifariam Pv in Δ , si fiat ut ΔP ad $P\Phi$, hoc est, ut 5 ad 3 , ita rectangulum BDK , quod est $\frac{1}{12}$ quadrati BC , ad aliud spatium Z ; erit hoc, multiplex secundum numerum particularum solidi ABC , æquale quadratis distantiarum à plano AD *. Apparet autem, fieri spatium Z æquale $\frac{1}{10}$ quadrati BC .

Itaque, totum spatium applicandum, æquatur hic $\frac{3}{80}$ quadrati AD , cum $\frac{1}{10}$ quadrati BC . Vnde, si suspensio, ut hic, posita fuerit in A , vertice pyramidis, ideoque distantia, ad quam applicatio facienda,

$A B$ æqualis $\frac{1}{4} A D$; fiet hinc $E S$, intervallum quo centrum agitationis inferius est centro gravitatis, æquale $\frac{1}{10} A D$, atque insuper $\frac{1}{10}$ tertiæ proportionalis duabus $A D$, $B C$. sive tota $A S$ æqualis $\frac{1}{4} A D$, præter dictam $\frac{1}{10}$ tertiæ proportionalis.

DE CENTRO
O S C I L L A -
T I O N I S.

Centrum oscillationis Coni.

Quod si $A B C$ conus fuerit, omnia eodem modo se habebunt, nisi quod spatium Z hic sit æquale rectangulo $\Delta P \Phi^*$, hoc est $\frac{1}{10}^* \text{ Prop. 15. huj.}$ quadrati $P V$ vel $B D$, sive $\frac{3}{80}$ quadrati $B C$. Quare, totum spatium applicandum, in cono erit $\frac{3}{80}$ quadrati $A D$, una cum $\frac{3}{80}$ quadrati $B C$. Ac proinde, posita suspensione ex vertice A , fiet $E S$, qua centrum agitationis inferius est centro gravitatis, æqualis $\frac{1}{10} A D$, & $\frac{1}{10}$ tertiæ proportionalis duabus $A D$, $B C$. sive tota $A S$ æqualis $\frac{1}{4} A D$, una cum $\frac{1}{10}$ tertiæ proportionalis duabus $A D$, $D B$. Atque hinc manifestum est, si $A D$, $D B$ æquales sint, hoc est, si conus $A B C$ sit rectangulus, fieri $A S$ æqualem axi $A D$.

Sequitur quoque porro, ex propositione 20, conum hunc rectangulum, si ex D centro baseos suspendatur, isochronum fore sibi ipsi ex vertice A suspensio, quemadmodum & de triangulo rectangulo supra ostensum fuit.

Centrum oscillationis Sphæra.

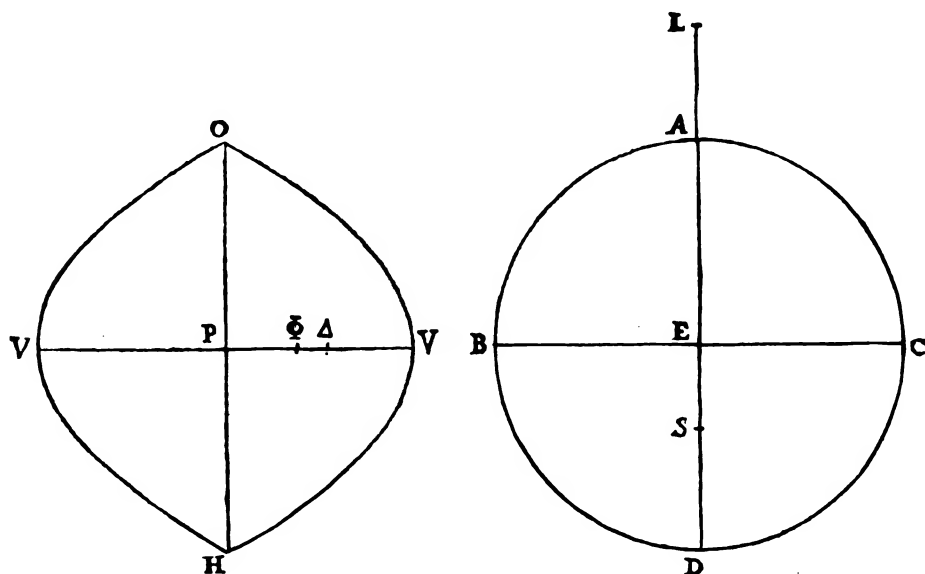
Si $A B C$ sit sphæra, erit figura plana proportionalis, à latere adponenda, $O V H$, ex parabolis composita, quarum basis communis $O H$, æqualis sphære diametro $A D$. Sectâ vero sphærâ planis per centrum E , quorum $B C$ sit horizonti parallelum, $A D$ vero verticale: ut inveniatur summa quadratorum à distantiiis à plano $A D$, noscenda est distantia centri gr. parabolæ $O V H$ ab $O H$, quæ sit ΦP , estque $\frac{1}{2} V P$. Deinde, divisâ $P V$ bifariam in Δ , constat rectangulum $\Delta P \Phi$, multiplex per numerum particularum sphære $A B C$, æquari quadratis distantiarum à plano $A D^*$. Est autem rectangulum $\Delta P \Phi$ æquale $\frac{1}{2}$ quadrati $P V$, vel quadrati $B E$.

* Prop. 15. in
fine.

Atqui, quadrata distantiarum à plano $B C$, æqualia esse liquet quadratis distantiarum à plano $A D$, ac proinde eidem rectangulo $\Delta P \Phi$, multiplici per dictum particularum numerum. Ergo spatium applicandum, in sphæra $A B C$, erit duplum rectanguli $\Delta P \Phi$; ideoque æquale $\frac{1}{2}$ quadrati à radio $E B$.

Itaque, si sphæra suspensa sit ex puncto in superficie sua A , erit
S iij

Es , à centro spheræ E ad centrum agitationis s , æqualis $\frac{2}{3}$ semidia-
metri $A E$. Totaque As æqualis $\frac{7}{10}$ diametri $A D$. Si vero ex pun-
cto alio, ut L , sphaera suspensa sit; erit Es æqualis $\frac{2}{3}$ tertiæ pro-
portionalis duabus LE , EB .



Centrum oscillationis Cylindri.

In cylindro, invenimus spatium applicandum æquari $\frac{1}{12}$ quadrati
altitudinis, una cum $\frac{1}{4}$ quadrati à semidiametro basis. Vnde si cy-
lindrus à centro basis superioris suspendatur, fit longitudo pen-
duli isochroni æqualis $\frac{2}{3}$ altitudinis, una cum semisse ejus, quæ sit
ad semidiametrum basis ut hæc ad altitudinem.

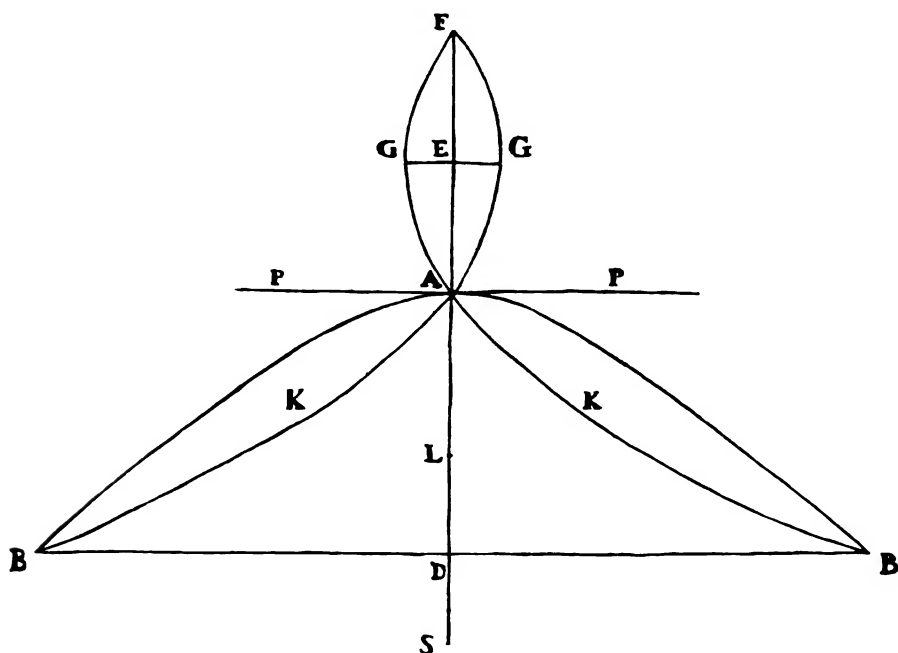
Centrum oscillationis Conoidis Parabolici.

In conoide parabolico, rectangulum oscillationis est $\frac{1}{18}$ quadra-
ti altitudinis, cum $\frac{1}{6}$ quadrati à semidiametro basis. Vnde, si à pun-
cto verticis fuerit suspensum, fit longitudo penduli isochroni
 $\frac{1}{4}$ axis, cum $\frac{1}{4}$ ejus quæ sit ad semidiametrum basis, sicut hæc ad
axem, id est, una cum $\frac{1}{4}$ lateris recti parabolæ genitricis.

Centrum oscillationis Conoidis Hyperbolici.

In conoide quoque hyperbolico centrum oscillationis inveniri
potest. Si enim, exempli gratia, fit conoides cujus sectio per
axem, hyperbola BAB ; axem habens AD , latus transversum AF :
erit figura plana ipsi proportionalis $BKA B$, contenta basi BB ,

& parabolicæ lineæ portionibus similibus AKB , quæ parabolæ per DE CENTRO
verticem A transeunt, axemque habent GE , dividenter bifariam OSCILLA-
latus transversum AF , ac parallelum basi BB . Et hujus quidem figu-
ræ $BKA KB$, centrum gravitatis L , tantum distat à vertice A ,
quantum centrum gravitatis conoidis ABB ; estque axis AD ad
 AL , sicut tripla FA cum dupla AD , ad duplam FA cum sesquial-
tera AD . Deinde & distantia centri gr. figuræ dimidiæ $ADBK$, ab
 AD , inveniri potest, atque etiam subcentrica cunei super figura
 $BKA KB$, abscissi plano per AP , parallelam BB ; hujus inquam cu-
nei subcentrica, super ipsa AP , inveniri quoque potest; atque ex
his consequenter centrum agitationis conoidis, in quavis suspen-
sione; dummodo axis, circa quem movetur, sit basi conoidis pa-
rallelus. Atque invenio quidem, si axis AD lateri transverso AF
æqualis ponatur, spatium applicandum æquari $\frac{1}{10}$ quadrati AD ,
cum $\frac{31}{100}$ quadrati DB . Tunc autem AL est $\frac{7}{10} AD$.



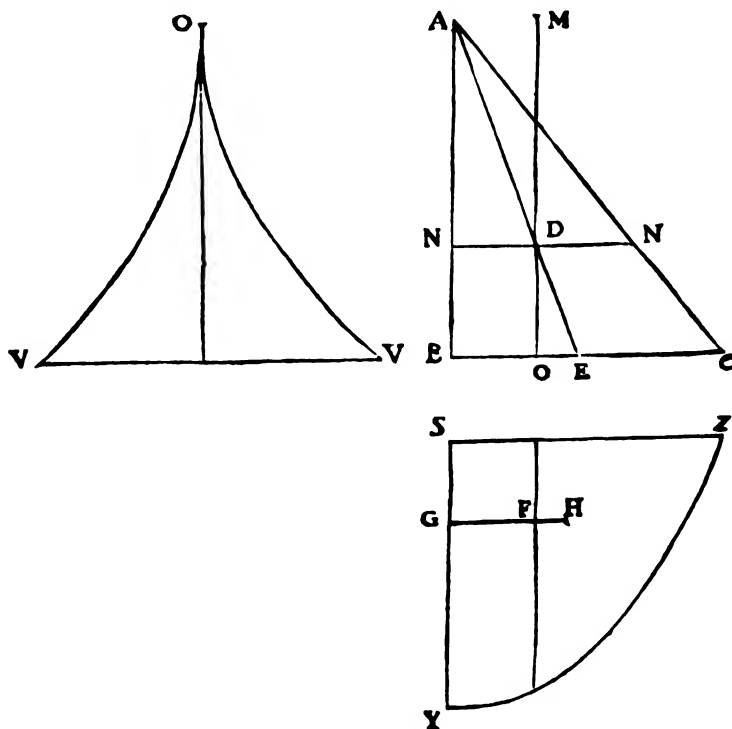
Vnde, si conoides hujusmodi ex vertice A suspendatur, inveni-
tur longitudo penduli isochroni, AS , æqualis $\frac{27}{35} AD$, cum $\frac{31}{140}$ tertiæ
proportionalis duabus AD , DB .

Centrum oscillationis dimidii Coni.

Denique & in solidis dimidiatis quibusdam, quæ fiunt sectione
per axem, centrum agitationis invenire licebit. Vt si sit conus
dimidiatus ABC , verticem habens A , diametrum semicirculi ba-

seos BC : ejus quidem centrum gravitatis D notum est, quoniam AD sunt $\frac{1}{4}$ rectæ AE , ita dividens BC in E , ut, sicut quadrans circumferentiæ circuli ad radium, ita sint $\frac{1}{4}$ CB ad BE . Tunc enim E est centrum gravitatis semicirculi baseos, ideoque in AE centra gravitatis omnium segmentorum semiconi ABD , basi parallelorum.

Et figura quidem porro proportionalis à latere ponenda, OVV , eadem est quæ in cono toto supra descripta fuit: per quam nempe invenietur summa quadratorum, à distantiiis particularum semiconi à plano horizontali ND , per centrum gravitatis ducto. Verum quadrata distantiarum, à plano verticali MDO , ut colligantur, altera quoque figura proportionalis syz , sicut supra prop. 14. adhibenda est, cujus nempe sectiones verticales, exhibeant lineas proportionales sectionibus sibi respondentibus in semicono ABC .



& hujus figuræ cognoscenda est distantia centri gr. F ab sY , quam æqualem esse constat distantie DN , centri gr. semiconi à plano trianguli AB . positæque HG subcentricæ cunei abscissi super figura sYZ , ducto plano per sY , noscendum est rectangulum $G FH$, cujus nempe multiplex, secundum numerum particularum semiconi ABC , æquabitur quadratis distantiarum semiconi in planum MDO . Licebit vero cognoscere rectangulum illud $G FH$, etiam si subcentricæ HG longitudo ignoretur, hoc modo.

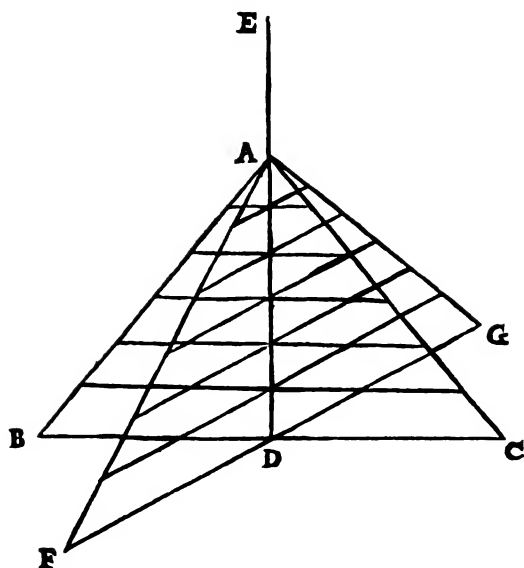
Diximus supra, cum de cono ageremus, quadrata distantiarum à plano

à plano per axem ejus, æquari $\frac{1}{10}$ quadrati à diametro basis, sive $\frac{3}{10}$ quadrati à semidiametro, multiplicis per numerum particularum coni totius. Vnde & hic, in semicono ABC , quadrata distantiarum à plano AB æqualia erunt $\frac{1}{10}$ quadrati BC , multiplicis per numerum particularum ipsius semiconi. Sed & rectangulum HGF , multiplex per numerum particularum semiconi ABC , æquatur quadratis distantiarum à plano AB , ut patet ex propositione 9. Ergo rectangulum HGF æquale $\frac{1}{10}$ quadrati BC . Ponendo autem $AB \propto a$; $BC \propto b$; & quadrantem circumferentiæ, radio BC descriptæ, $\propto q$; fit $EB \propto \frac{1}{3} \frac{b}{q}$. Cujus cum ND tribus quartis æquetur, fiet proinde ND , sive $GF \propto \frac{1}{1} \frac{b}{q}$. Cujus quadratum auferendo à rectangulo HGF , quod erat $\frac{3}{10}$ quadrati BC , fiet rectangulum $GFH \propto \frac{3}{10} bb - \frac{1}{49} \frac{b^4}{q^2}$. Hoc autem rectangulum, multiplex per numerum particularum semiconi ABC , æquatur quadratis distantiarum à plano MDO . At quadratis distantiarum à plano MD æquantur, ut in cono, $\frac{3}{80}$ quadrati AB , sive $\frac{3}{80} aa$, multiplices per numerum particularum semiconi ABC . Itaque, totum spatium applicandum, æquabitur hic $\frac{3}{80} aa + \frac{1}{10} bb - \frac{1}{49} \frac{b^4}{q^2}$.

Vnde quidem centrum agitationis invenitur in omni suspensione semiconi, dummodo ab axe qui fit parallelus basi trianguli à sectione AB . Notandum vero, cum figura $sz\gamma$ sit ignotæ prorsus naturæ, subcentricam tamen GH , cunei super ipsa abscissi plano per $s\gamma$, hinc inveniri. Nam, quia rectangulum HGF æquale erat $\frac{3}{10} bb$, sive quadrati BC , & GF æqualis $\frac{1}{1} \frac{b}{q}$, fit inde GH æqualis $\frac{3}{10} q$.

Porro, etiam semicylindri, & semiconoidis parabolici, centra agitationis inveniri possunt, atque aliorum insuper semisolidorum; quæ aliis investiganda relinquimus.

Quemadmodum autem in figuris planis, ita & hic in solidis figuris locum habet, quod de obliquarum centris agitationis illic diximus, quæ veluti luxatione rectarum constituuntur, quarum centra oscillationis non differunt à centris oscillationis rectarum. Sic, si coni duo fuerint ABC , AFG , alter rectus, alter scalenus; quorum & diametri & bases æquales; hi ex vertice suspensi, vel à quibuscunque axibus, æqualiter à centris eorum gravitatis distantibus, isochroni erunt; dummodo axis, unde conus scalenus suspensus est, rectus sit ad planum trianguli per diametrum, quod planum basi est ad angulos rectos.



PROPOSITIO XXIII.

H Orologiorum motum temperare, addito pondere exiguo secundario, quod super virga penduli, certa ratione divisa, sursum deorsumque moveri possit.

Vt hoc expediamus, primo penduli ipsius, ex virga gravitate prædita, & appenso parte ima pondere, compositi, centrum oscillationis inveniendum est.

Sit virga, cum appenso pondere, AC , cujus longitudo dicatur a .

D A D

M

T



* Prop. 6. huj.
vin fine.

Intelligentur autem, tum virga ipsa, tum pondus appensum C , in particulas minimas æquales divisa, earumque particularum virga habeat numerum b , pondus vero C numerum c , ponendo nempe b ad c , sicut gravitas virgæ ad gravitatem appensi ponderis. Longitudo igitur penduli simplicis, dato isochroni, habebitur, si summa quadratorum à distantiiis particularum omnium à puncto suspensionis A , dividatur per summam earundem distantiarum *. Secetur AC bifariam in M ; tum vero in T , ut AT sit dupla TC . Quia ergo M est centrum gravitatis lineæ AC , & AT subcentrica cunei super ipsa abscissi plano per AD , perpendiculararem ad AC ; qui cuneus hîc revera triangulum est; erit summa quadratorum, à distantiiis particularum virgæ à puncto A ,

æqualis rectangulo AMT , una cum quadrato AM ; hoc est, rectangulo TAM , multiplici secundum numerum particularum b ; hoc est, $\frac{1}{3} aab$; quia MA est $\frac{1}{2} a$, & TA $\frac{2}{3} a$, ac proinde rectangulum TAM $\propto \frac{1}{3} aa$. Summa vero quadratorum, à distantiiis particularum ponderis c ab eodem puncto A , æquabitur quadrato AC , multiplici secundum numerum particularum ipsius ponderis; hoc est, aac . Adeoque summa quadratorum omnium, tam à distantiiis particularum virgæ, quam ponderis c , erit $\frac{1}{3} aab + aac$.

Porro, distantia omnes particularum virgæ AC à puncto A , æquantur $\frac{1}{2} ba$; longitudini scilicet virgæ ipsius, quæ est a , multiplici secundum semissem numeri particularum quas continet. Et distantia omnes particularum ponderis c , ab eodem puncto A , sunt ac . Ita ut summa utrarumque distantiarum sit $\frac{1}{2} ab + ac$. Per quam dividendo summam quadratorum prius inventam, $\frac{1}{3} aab + aac$

fit $\frac{\frac{1}{3} aab + aac}{\frac{1}{2} ab + ac}$ sive $\frac{\frac{1}{3} ab + ac}{\frac{1}{2} b + c}$, longitudo penduli isochroni.

Quæ itaque habebitur, si fiat, ut dimidia gravitas virgæ, una cum gravitate appensi ponderis, ad trientem gravitatis virgæ, una cum gravitate ejusdem appensi ponderis, ita longitudo AC ad aliam. Oportet autem sumere longitudinem AC , à puncto suspensionis A ad centrum gravitatis ponderis c ; cum magnitudinis ejus ratio hic non habeatur, ac veluti minimum consideretur.

Quod si jam, præter pondus c , alterum insuper D virgæ inhærere intelligatur, cujus gravitas, seu particularum numerus sit d ; distantia vero AD sit f . Vt pendulum simplex huic ita composito isochronum inveniatur, addenda sunt ad summam superiorem quadratorum, quadrata distantiarum particularum ponderis D à puncto A , quæ quadrata apparet esse ddf . Adeo ut summa omnium jam sit futura $\frac{1}{3} aab + aac + ffd$. Item, ad summam distantiarum, addendæ distantia particularum ponderis D , quæ faciunt df . Ac summa proinde distantiarum omnium erit $\frac{1}{2} ba + ca + fd$; per quam dividenda est ista quadratorum summa, & fit $\frac{\frac{1}{3} aab + aac + ffd}{\frac{1}{2} ab + ac + fd}$, longitudo penduli iso-

chroni.

Quod si vero, hæc longitudo penduli isochroni, data æqualis postuletur, quæ sit p , & reliqua omnia quæ prius data sint, præter

T ij



distantiam AD seu f , quæ determinat locum ponderis D : sitque invenienda hæc distantia, id fiet hoc modo. Nempe, cum postu-

letur $\frac{\frac{1}{2}aab+aac+ffd}{\frac{1}{2}ab+ac+fd}$ æquale p , orietur ex hac æquatione $ff \propto pf +$

$\frac{\frac{1}{2}abp+cap-\frac{1}{2}aab-aac}{d}$. Et $f \propto \frac{1}{2}p +$ vel $- \sqrt{\frac{\frac{1}{4}pp+\frac{1}{2}abp+cap-\frac{1}{2}aab-aac}{d}}$. Vbi

animadvertendum, duas esse veras radices, si $\frac{1}{2}abp+cap$ minus sit quam $\frac{1}{2}aab+aac$; hoc est, si longitudo p minor sit quam

$\frac{\frac{1}{2}ab+ac}{\frac{1}{2}b+c}$, quæ antea inventa fuit longitudo penduli isochroni, sive

distantia centri oscillationis à suspensione, in pendulo composito ex virga AC & pondere C .

Vnde patet, si velimus efficere, ut, applicato pondere D , acceleretur penduli motus; posse duobus locis, inter A & C , illud disponi, quorum utrolibet eadem celeritas pendulo concilietur: velut in D vel E . Quæ loca æqualiter distabunt à puncto N , quod abest ab A , semisse longitudinis p , hoc est, semisse penduli simplicis, cui compositum hoc isochronum postulabatur. Apparet autem, quando hæc longitudo p tantum exiguo minor ponitur quam AC , etiam punctum N exiguo superius esse puncto medio virgæ AC .

Porro, ex æquatione superiori, $f \propto p +$ vel $- \sqrt{\frac{\frac{1}{4}pp+\frac{1}{2}abp+cap-\frac{1}{2}aab-aac}{d}}$ habetur determinatio longitudinis p . Patet enim, $\frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}abp+cap$ non minus esse debere quam $\frac{1}{2}aab-aac$. Vnde non debet esse

minor quam $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{bd+4cd+bb+4bc+4cc-\frac{ab+ac}{d}}{d}}$. Quod si p æquetur huic quantitati, hoc est, si $\frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}abp+cap$ fuerit æquale $\frac{1}{2}aab-aac$, erit jam, in eadem superiori æquatione, $f \propto \frac{1}{2}p$,

hoc est, $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{bd+4cd+bb+4bc+4cc-\frac{ab+ac}{d}}{d}}$. Quo determinatur distantia ponderis D à puncto A , ex qua maxime omnium acceleret motum penduli.

Atque hæc ad horologiorum usum sic porro adhibentur. Sit, exempli gratia, pendulum horologii, quod singulis oscillationibus scrupula secunda noet. Virgæ autem gravitas sit $\frac{1}{10}$ gravitatis appensi ponderis in imo pendulo: & præter hoc, sit aliud exiguum pondus mobile secundum virgæ longitudinem, cujus gravitas ea-

dem ponatur quæ ipsius virgæ. Quæritur jam, quo loco hoc virgæ DE CENTRO OSCILLATIONIS. imponendum, ut uno scrupulo primo acceleretur horologii motus, spatio 24 horarum. Item, ubi collocandum, ut duorum scrupulorum primorum sit acceleratio; item, ut trium, quatuor, atque ita porro.

Ductis viginti quatuor horis sexagies, fiunt 1440, quot nempe scrupula prima una die continentur. Ex his unum aufer, quando unius scrupuli acceleratio quæritur: supersunt 1439. Ratio autem 1440 ad 1439 duplicata, proxime est ea quæ 1440 ad 1438. Ergo, si penduli simplicis, secunda scrupula notantis, longitudo divisa intelligatur in partes æquales 1440, earumque 1438 alii pendulo tribuantur, hoc præcedet alterum illud, in 24 horis, uno scrupulo primo. Adeo ut hic p valeat partes 1438.

Quia autem pendulum horologii, ex virga metallica & pondere appenso compositum, isochronum ponitur pendulo simplici partium 1440; invenienda primum est virgæ illius longitu-

do, ex æquatione superius posita. Erat nempe $\frac{\frac{1}{3}ab+ac}{\frac{1}{3}b+c}$ æquale longi-

tudini penduli simplicis, quod isochronum composito ex virga habente longitudinem a , gravitatem b , & pondere affixo cujus gravitas c . Ergo si longitudo penduli simplicis isochroni dicatur f . Erit

$$\frac{\frac{1}{3}bf+cf}{\frac{1}{3}b+c} \propto a. \text{ positoque, ut hic, } c \propto 50; b \propto 1; f \propto 1440; \text{ fiet } a \propto$$

1444 $\frac{4}{3}$, longitudo virgæ.

$$\text{Iam, quia erat } f \propto \frac{1}{3}p + \text{vel} - \sqrt{\frac{1}{4}pp + \frac{1}{3}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}, \text{ fiet } f \propto$$

$\frac{1}{3}p + \text{vel} - \sqrt{\frac{1}{4}pp + 72962p - 105061210}$. Vnde porro, si p fit, uti diximus, partium 1438; invenietur $f \propto 1331 \frac{1}{3}$, qualium nempe f , seu pendulum simplex, secunda scrupula oscillationibus designans, continet 1440. Cujus longitudo si pedum trium statueretur, quos horarios vocavimus, habebit uncias 33, & 3 unciarum uncias, quas lineas vocant. Vel, auferendo hanc longitudinem f à tota trium pedum longitudine, supererunt uncia duæ, linea 9, à centro oscillationis penduli compositi sursum sumendæ, ut habeatur locus ponderis D , unius scrupuli primi accelerationem præstans tempore 24 horarum. Eodem modo reliquas distantias, quibus virga dividenda est, calculo investigavimus, aliam atque aliam ponendo longitudinem p : easque subjecta tabella exhibe-

mus, secundum cujus numeros etiam virga penduli divisa est, quæ superius in descriptione horologii fuit exhibita. Procedunt autem accelerationes diurnæ, ut jam illic advertimus, per 15 scrupula secunda, seu primorum scrupulorum quadrantes. Ex. gr. si, pondere mobili D hærente in parte 73, 4, inveniatur horologium tardius justo incedere, in 24 horis, differentiâ 15 secundorum scrupulorum; oportebit sursum adducere pondus D, usque ad numerum 85, 6, ut corrigatur.

Acceleratio horologii spatio 24 horarum.		Partes, à centro osc. sursum accipiendæ.
Scrup. pr.	Sec.	Linea & decima linearum pedis horarii.
0,	15	7, 0
0,	30	15, 2
0,	45	23, 7
1,	0	32, 6
1,	15	41, 9
1,	30	51, 7
1,	45	62, 2
2,	0	73, 4
2,	15	85, 6
2,	30	99, 0
2,	45	114, 1
3,	0	131, 8
3,	15	154, 3
3,	30	192, 6

Centrum oscillationis altius est centro gravitatis C partibus 1, 4.

PROPOSITIO XXIV.

CEntri oscillationis rationem haberi non posse, in pendulis inter Cycloides suspensis; & quomodo hinc orta difficultas tollatur.

Si quis, subtili examine, contulerit ea quæ in superioribus, de pendulo inter cycloides suspensio, demonstravimus, cum his quæ ad centrum oscillationis pertinent; videbitur ei deesse aliquid ad perfectam illam, quam præferimus, oscillationum æqualitatem. Ac primo dubitabit, an, ad inveniendum circulum cycloidis genitorem, penduli longitudo accipienda sit à puncto suspensionis ad

centrum gravitatis appensi plumbi, an vero ad centrum oscillationis; quod, ab altero illo, sæpe sensibili intervallo distat, atque eo majore, quo major fuerit sphaera aut lens plumbea. Quid enim, si sphaerae diameter quartam, aut tertiam partem, penduli longitudinis æquet? Quod si ad centrum oscillationis illam longitudinem accipiendam dicamus, non tamen expediet quo pacto ea, quæ de centro oscillationis ostensa sunt, convenient pendulo continue longitudinem suam immutanti, quale illud quod inter cycloides movetur. Posset enim videri, etiam centrum oscillationis mutari, ad singulas diversas longitudes; quod tamen hoc modo intelligendum non est. Res sane explicatu difficillima, si omnimodam ἀκριβείαν sectemur. Nam in demonstratione temporum æqualium in cycloide, mobile, per eam delatum, veluti punctum gravitate præditum consideravimus. Sed, si ad effectum spectemus, non magni facienda est difficultas hæc; cum ponderis, quo pendulum constat, magnitudo in horologiis tanta non requiratur (etsi quo majus eo melius) ut differentia centrorum gravitatis, & oscillationis, aliquid hic turbare possit. Quod si tamen effugere prorsus has tricas velimus, id ita consequemur, si sphaeram lentemve penduli, circa axem suum horizontalem, mobilem efficiamus: axis extrema utrinque, virgæ penduli imæ, inferendo: quæ idcirco ut bifida hac parte sit necesse est. Fit enim hoc modo, ex motus natura, ut eandem perpetuo positionem, respectu horizontalis plani, sphaera penduli servet, atque ita puncta ejus quævis, æque ac centrum ipsum, cycloides easdem percurrant. Vnde cessat hic jam centrorum oscillationis consideratio; nec minus perfectam temporum æqualitatem tale pendulum consequitur, quam si puncto unico omnis ejus gravitas contineretur.

PROPOSITIO XXV.

DE mensura universalis, & perpetua, constituenda ratione.

Certa, ac permanens magnitudinum mensura, quæ nullis casibus obnoxia sit, nec temporum injuriis, aut longinquitate aboleri aut corrumpi possit, res est & utilissima, & à multis pridem quæsita. Quæ si priscis temporibus reperta fuisset, non tam perplexæ nunc forent, de pedis Romani, Græci, Hebræique veteris modulo, disceptationes. Hæc vero mensura, Horologii nostri opera, facile constituitur; cum sine illo nequaquam, aut ægre admodum, ha-

beri possit. Etsi enim, simplici pendulorum oscillatione, hoc à quibusdam tentatum fuerit, numerando recursus qui tota cæli conversione continentur, vel parte ejus cognita, per fixarum stellarum distantias, secundum ascensionem rectam; nec certitudo eadem hoc modo, quæ adhibitis horologiis, contingit, & labor longe est molestissimus ac tædiosissimus, propter numerandi sollicitudinem. Quia autem, præter horologia, aliquid, ad exactissimam hujus mensuræ inquisitionem, etiam centrorum oscillationis notitia confert; ideo hic demum, post eorum tractationem, hanc determinationem subjicimus.

Aptissima huic rei sunt horologia, quorum oscillationes singulæ secunda scrupula, vel eorum semisses, notant, quæque indicibus etiam, ad ea demonstranda, instructa sunt. Postquam enim, ad mediocrem dierum longitudinem, ejusmodi horologium, fixarum stellarum observationibus, compositum fuerit, methodo illa quam in horologii descriptione ostendimus: aliud pendulum simplex, hoc est, sphaera plumbea, aut alia materia gravi constans, ex tenui filo religata, juxta suspendenda est, motuque exiguo impellenda; ac tantisper producenda, aut contrahenda fili longitudo, donec recursus ejus, per quadrantem horæ, aut semissem, una ferantur cum reciprocationibus penduli horologio aptati. Dixi autem exiguo motu impellendum pendulum, quia oscillationes exiguæ, puta 5 vel 6 partium, satis æqualia tempora habent, magnæ vero non item. Tunc, acceptâ mensurâ distantiae, à puncto suspensionis ad centrum oscillationis penduli simplicis; eaque, si recursus singuli scrupula secunda valeant, in tres partes divisâ; facient hæ singulæ longitudinem pedis, quem HORARIUM in superioribus vocavimus: quique, hoc pacto, non solum ubique gentium constitui possit, sed & venturo ævo redintegrari. Adeo ut & moduli pedum omnium aliorum, semel ad hunc proportionibus suis expressi, certò quoque in posterum cognosci possint. Sicut jam supra, pedem Parisiensem ad hunc horarium esse diximus, ut 864 ad 881; quod idem est ac si, posito prius pede Parisiensi, dicamus tribus hujusmodi pedibus, cum octo lineis & dimidia, constitui pendulum simplex, cujus oscillationes scrupulis secundis horariis responsuræ sint. Pes autem Parisiensis ad Rhenanum, quo in patria nostra utuntur, se habet ut 144 ad 139; hoc est, quinque lineis suis diminutus, alterum illum relinquit. Atque ita & hic pes, & alii quilibet, perpetuo duraturas mensuras accipiunt.

Quomodo autem centrum oscillationis in sphaera, ex qualibet longitudine

longitudine suspensa, inveniatur, in superioribus demonstratum est. Nempe, si fiat ut distantia inter punctum suspensionis & sphaeræ centrum, ad semidiametrum ejus, ita hæc ad aliam; ejus duas quintas, à centro deorsum acceptas, terminari in quæsito oscillationis centro. Facile autem apparet cur necessaria sit hujus centri consideratio, ad accuratam pedis Horarii constitutionem. Nam, si à puncto suspensionis ad sphaeræ centrum distantia accipiat, sphaeræ autem magnitudo non definiatur proportionem ad fili longitudinem, non erit certa mensura penduli cujus recursus secunda scrupula metiantur; sed quo major erit ejus sphaera, hoc minor invenietur mensura illa, inter centrum sphaeræ & punctum suspensionis intercepta. Quia in isochronis pendulis, centra quidem oscillationis à punctis suspensionum æqualiter distant; amplius autem descendit centrum oscillationis infra centrum sphaeræ majoris, quam minoris.

Hinc necesse fuit illis, qui, ante hanc centri oscillatorii determinationem, mensuræ universalis constituendæ rationem inierunt; quod, jam inde à prima Horologii nostri inventionem, nobilis illa Societas Regia Anglicana sibi negotium sumpsit, & recentius doctissimus Astronomus Lugdunensis, Gabriel Moutonus; his, inquam, necesse fuit designare globuli suspensi diametrum, vel proportionem certam ad fili longitudinem, cujus nempe tricesimam vel aliam partem æquaret; vel mensura quadam cognita, ut digiti vel pollicis. Sed hoc posteriore modo, ponitur jam certi aliquid, quod id ipsum est quod quærendum est: etsi scio vix sensibilem errorem fore, dummodo sphaeræ istam, quam jam dixi, magnitudinem non multum excedant. Priore autem posset quidem aliquo pacto res explicari; sed ita, ut numerandarum oscillationum labor subeundus sit, calculoque etiam utendum. Quamobrem præstat, centra oscillationis adhibendo, certam rationem sequi, nullisque præter necessitatem legibus obligari. atque hic jam majoribus sphaeris quam exiguis potius utendum, quod illæ occursum aëris minus impediuntur.

Cæterum, non sphaeræ tantum ex filo suspensæ, sed & coni, cylindri, aliaque omnia solida, planaue, quorum centra oscillationis superius exhibuimus, ad hanc mensuram investigandam apta sunt; quoniam, à puncto suspensionis ad centrum oscillationis, certum idemque omnibus isochronis pendulis est intervallum. Neque etiam illa duntaxat horologia, quæ secunda scrupula aut eorum semisses singulis penduli recursibus indicant, ad hæc usur-

pare possumus; sed & aliâ quâcunque penduli longitudine instructis propositum obtinebitur, dummodo ex rotarum proportionibus, seu dentium numero, cognoscatur numerus oscillationum certo tempore peragendarum. Invento enim pendulo simplici, cujus librationes singulæ convenient vel singulis, vel binis ternisve recursibus horologii, constabit jam hinc, quot penduli illius vices horæ spatio transigantur. Quarum numerus si quadretur, erit ut quadratum è 3600, numero scrupulorum secundorum horam unam efficientium, ad quadratum illius numeri, ita longitudo penduli simplicis inventi, (quæ longitudo semper à puncto suspensionis ad centrum oscillationis accipienda est) ad longitudinem penduli illius horarii tripedalis, quod diximus. Hoc enim inde constat, quod duorum quorumvis pendulorum longitudo sunt inter se, sicut quadrata temporum quibus singulæ oscillationes transeunt; ideoque contrariam rationem habent quadratorum à numeris, quos efficiunt oscillationes æqualibus temporum intervallis peractæ. Nam, cum hætenus experientiâ tantum comprobatum fuerit Theorema illud, de pendulorum longitudinibus; eas nempe duplicatam habere rationem temporum, quibus oscillationes singulæ peraguntur; nunc ejus demonstratio ex superius traditis manifesta est. Cum enim ostenderimus, singulos recursus penduli, inter cycloides suspensi, ad casum perpendicularem, è dimidia penduli longitudine, certam rationem habere; eam scilicet quam circumferentia circuli ad diametrum suam; facile hinc colligitur, tempora oscillationum in duobus pendulis esse inter se, sicut tempora descensus perpendicularis ex dimidiis eorum altitudinibus. Quæ altitudines dimidiæ, sive etiam totæ, cum habeant rationem duplicatam temporum, quibus ipsæ descensu perpendiculari percurruntur*, eadem quoque duplicatam rationem habebunt temporum, quæ oscillationes singulas metiuntur. Ab oscillationibus autem minimis penduli, inter cycloides suspensi, non differunt sensibilibiter oscillationes minimæ penduli simplicis, cujus eadem sit longitudo. Itaque & pendulorum simplicium longitudo, duplicatam rationem habebunt temporum, quibus oscillationes minimæ transiguntur.

Quod si quis oscillationum numerandarum, quæ horæ aut semi-horæ tempore transeunt, laborem non defugiat; horologiumque adsit, cujus index secunda scrupula demonstret; quæcunque accipiat penduli simplicis longitudo, ejus numerus oscillationum, quæ hora una continentur, hoc modo cognoscetur; atque inde longitudo penduli tripedalis, ad secunda scrupula, ut antea, calculo prodibit.

* Prop 3.
Part. 2.

Spatium definire, quod gravia, perpendiculariter cadentia, dato tempore percurrunt.

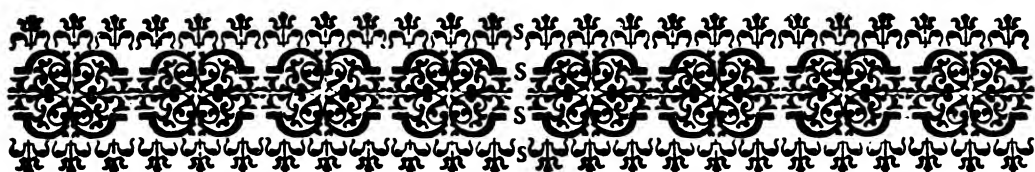
Hanc mensuram quicumque hactenus investigarunt, experimenta consulere necesse habuerunt; quibus, prout hactenus instituta fuere, non facile ad exactam determinationem pervenitur, propter velocitatem cadentium, sub finem motus acquisitam. Ex nostra autem prop. 25, de Descensu gravium, cognitaque longitudine penduli ad secunda scrupula, absque experimento, per certam consequentiam, rem expedire possumus. Ac primo quidem spatium illud inquiremus, quod unius scrupuli secundi tempore grave præterlabitur; ex quo quælibet alia deinde colligere licebit. Quia igitur penduli, ad secunda scrupula, longitudinem diximus esse pedum Horariorum 3: tempus autem unius oscillationis minimæ, est ad tempus descensus perpendicularis ex dimidia penduli altitudine, ut circumferentia circuli ad diametrum, hoc est, ut 355 ad 113: si fiat, ut numerus horum prior ad alterum, ita tempus unius secundi scrupuli, sive sexaginta tertiorum, ad aliud; fient $19\frac{1}{10}$, tempus descensus per dimidiam penduli altitudinem, quæ nempe est pedis unciarum 18. Sicut autem quadrata temporum, ita sunt spatia illis temporibus peracta, quemadmodum superiori propositione fuit ostensum. Ergo, si fiat ut quadratum ex $19\frac{1}{10}$ ad quadratum ex 60, hoc est, ut 36481 ad 360000, ita 18 uncia ad aliud, fient ped. 14. unc. 9. lin. 6, altitudo descensus perpendicularis, tempore unius secundi. Cum autem pes Horarius sit ad Parisiensem, ut 881 ad 864; erit eadem altitudo, ad hanc mensuram reducta, proximè pedum 15 & uncia unius. Atque hæc cum accuratissimis experimentis nostris prorsus conveniunt. in quibus punctum illud temporis, quo casus finitur, non aurium aut oculi iudicio discernitur; quorum neutrum hic satis tutum est; sed spatium descendendo peractum, alio modo, quem hic exponere tentabimus, absque ullo errore cognoscitur.

Penduli, ad parietem tabulamve erectam, suspensi dimidia oscillatio moram temporis, cadendo absumpti, indicat. Cujus sphæru-
la, ut eodem momento ac plumbum casui destinatum dimittatur, utraque filo tenui connexa tenentur, quod admoto igne inciditur. Sed prius, casuro plumbo, funiculus alius adnectitur, ejus longitudinis, ut, cum totus exierit à plumbo tractus, nondum ad pa-

rietem illidatur pendulum. Funiculi ejus caput alterum, regulæ chartaceæ, aut ex tenui membrana paratæ, cohæret; ita ad parietem tabulamve applicatæ, ut trahentem funem facile sequi possit, rectâque secundum longitudinem suam descendere; eo loci transiens, quo penduli sphæra ad tabulam accidet. Absumpto igitur funiculo toto, pars insuper regulæ deorsum trahitur à cadente plumbo, priusquam pendulum ad tabulam pertingat. Quæ quantitas sit pars, sphæra fuligine leviter infecta, regulamque præterlabentem signans, indicat. Huc autem addita funiculi longitudine, spatium cadendo emensum certò definitum habetur.

Aëris autem occursum, quasi nullus esset in his intelligimus, ut mensura cadentibus corporibus præfixa cum experimentis exacte consentiat. Nec sane tantus est ille, ut in altitudinibus his, quò ascendere datur, sensibile discrimen inducere possit; dummodo solida corpora è metallo, aut, si leviori materia constent, mole grandiuscula accipiantur. Levitas enim materiæ, in iis quæ cadendo aërem secant, ita magnitudine corporis pensatur, ut sphæra lignea, vel etiam è subere formata, paria faciat cum plumbea: quando nimirum diameter harum ad plumbeæ diametrum eam rationem habuerit, quam gravitas plumbi propria ad ligni suberisve gravitatem. Tunc enim gravitates sphærarum erunt inter se sicut earum superficies. Veruntamen, ut æquali celeritate, quantum sensu percipi potest, decidant corpora, quæ multum intrinseca gravitate differunt, nequaquam opus est ut proportio illa diametrorum servetur. Possunt enim inter se æqualia esse, dummodo utraque satis magna sint; aut ex non nimia altitudine decidant. Etenim illud quoque hic animadvertendum est, tantam vel altitudinem esse posse; vel, in mediocri etiam altitudine, tantam projecti corporis levitatem; ut ob aëris renitentiam, acceleratio motus tandem ab illa, quam in superioribus demonstravimus, proportionem plurimum recessura sit. Namque in universum, corpori cuilibet, per aërem aliudve liquidum labenti, certus celeritatis modus, pro ratione ponderis ac superficie suæ, constitutus est; quem excedere, aut potius ad quem pervenire nunquam possit. Quæ nempe celeritas ea est, quam si aër, aut liquor ille sursum tendens, haberet, suspensum corpus idem sibi innatans sustinere posset. Verum de his, alias fortasse, pluribus agendi occasio erit.





HOROLOGII OSCILLATORII

P A R S Q U I N T A.

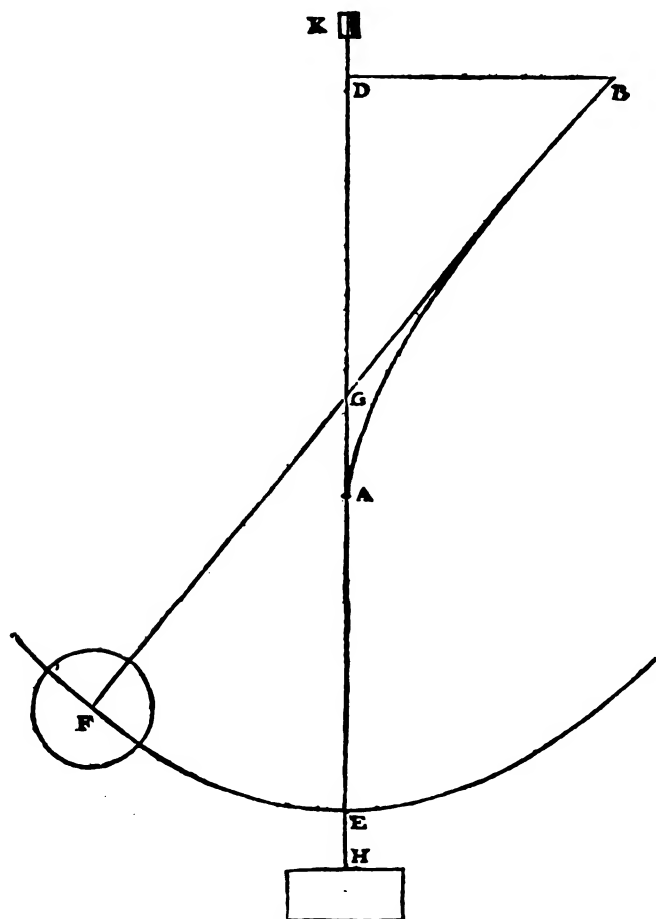
Constructionem aliam, è circulari pendulorum motu deductam, continens; & Theoremata de Vi Centrifuga.

EST & aliud Oscillatorii motus genus, præter id quod hætenus pertractavimus. Ejusmodi nempe, quo, per circuli ambitum, pendulum pondus circumfertur. Vnde aliud quoque horologii commentum deduximus, eodem fere tempore quo prius illud; certoque itidem æquabilitatis principio nixum; sed cujus usus minus percrebuit, propter alterius illius constructionem, quodammodo simpliciore[m] facilioremque. Plura tamen hujus quoque generis de quo nunc loquimur, nec sine successu, constructa fuere: estque in his singulare illud, quod continuo atque æquabili motu circumferri cernitur index postremus, qui secunda scrupula designat; cum in priore nostro horologio, omnibusque aliis, subsultim quasi feratur. Item hoc quoque, quod absque strepitu, sonoque omni, moveantur hac ratione constructa automata. quanquam, ad observationes astronomicas, sonus ad singula secunda scrupula repetitus, utilitate non careat. Et constitueram quidem, descriptionem horum cum iis demum edere, quæ ad motum circularem & Vim Centrifugam, ita enim eam vocare libet, attinent; de quo argumento plura dicenda habeo, quam quæ hoc tempore exequi vacet. Sed, ut nova nec inutili speculatione maturius fruantur harum rerum studiosi, neve casu aliquo interciderat, hanc quoque partem, præter destinatum, cæteris adjunxi, qua machinæ hujus fabrica breviter exponitur, simulque Theoremata traduntur, ad vim centrifugam pertinentia; demonstratione ipsorum in aliud tempus dilata.

Horologii secundi constructio.

Non necessarium duxi, ut rotarum, quibus interiora horologii constant, dispositionem hic exhiberem; cum ea ab artificibus fa-

cile ordinari, variisque modis mutari possit; sed eam partem explicari satis esse, quæ motum ejus certa ratione moderatur. Cujus partis hic figura expressa est.



Axis DH ad horizontem erectus intelligendus est, ac super polis duobus mobilis. Huic ad A affixa est lamina, latitudine aliqua prædita, curvataque secundum lineam AB ; quæ est paraboloides illa de qua ostendimus, propof. 8. partis 3, evolutione ejus, postquam ipsi recta quædam juncta fuerit, describi parabolam. Ea recta hic est AE ; parabolam vero, ex evolutione totius BAE descriptam, refert linea EF . Filum curvæ BA applicatum, cujus extremo puncto parabola describitur, est BGF . Pondus illi affixum F . Dum autem axis DH in sese vertitur, filum BGF , in rectam lineam extensum, sphaerulam F una circumducit, ita ut circulos horizonti parallelos percurrat; qui majores minoresve erunt, prout majori aut minori vi axis DH , ab rotis horologii in tympanidium K agentibus, incitabitur: sed ita, ut omnes in superficie conoidis parabolici contineantur. Atque hoc ipso æqualia semper circuitus tempo-

ra evadent, ut ex iis, quæ de hoc motu postea dicemus, apparebit. SECUNDI
HOROLOGII
DESCRIPTIO.

Quod si circuitus singulos, secundorum scrupulorum semisses notare velimus, oportet latus rectum parabolæ EF esse $4\frac{1}{2}$ uncia-
rum pedis Horarii nostri, hoc est dimidium longitudinis penduli,
cujus singulæ oscillationes semiscrupulum secundum impende-
rent. Ex parabolæ autem latere recto, pender magnitudo lateris re-
cti paraboloidis AB; quippe quod illius $\frac{27}{16}$ continet: atque item
longitudo AE, quæ lateris recti parabolæ dimidium est. Si vero se-
cunda scrupula unoquoque circuitu expleri desideremus, qua-
drupla priorum accipienda sunt, tum latera recta, tum linea AE.

Porro, etsi filum BGF veluti unicum ac simplex hætenus de-
signavimus, sciendum tamen longe præstare ut parte superiori du-
plex sit, ac versus F in angulum coeat, 20 vel 30 partium. In quem
finem & laminæ AB latitudo ad B tanta esse debet, quanta isti filo-
rum divaricationi sufficit, vel & ipsa bifida facienda. Hoc pacto
enim motus circularis ponderis F, absque alio ullo adminiculo,
continuatur, ac filum utrumque sibi annexum in rectum extendit;
quod non faceret, si unico tantum filo teneretur. Vbi tamen vim
illam ab horologii rotis, vel pondere vel alia potentia motis, ad
continuationem hujus motus circularis requiri sciendum. Quæ
nempe vis per tympanidium K ad axem KH pervenit, ac minimo
nisu, motum sphaeræ F semel inditum, conservat.

Hoc autem quo facilius possit, liberrimam axis KH revolutionem
esse oportet. Quod nulla ratione melius perfici compertum, quam
si, parte sui ima, durato chalybe constet, suppositamque habeat
adamantis superficiem planam; cujus minima quævis particula
hic sufficit, subter laminam perforatam collocanda.

Cæterum in locum fili BGF, qua parte curvæ AB applicari de-
bet, catenulam tenuem ex auro, aliove metallo, adhibere licebit,
quo melius invariata servetur longitudo. Atque hoc in priore quo-
que horologio, ubi pendulum inter cycloides suspensum est, ex-
perti sumus. Sed ibi flexus catenulæ continuus, attritu annulorum,
perexiguo licet, non parum impedit liberam penduli agitationem.

D E V I C E N T R I F V G A

ex motu circulari, Theoremata.

I.

S I mobilia duo æqualia, æqualibus temporibus circumfe-
rentias inæquales percurrant; erit vis centrifuga in ma-

jori circumferentia, ad eam qua in minori, sicut ipsa inter se circumferentia, vel earum diametri.

I I.

Si duo mobilia aequalia, aequali celeritate ferantur, in circumferentiis inaequalibus; erunt eorum vires centrifugae in ratione contraria diametrorum.

I I I.

Si duo mobilia aequalia in circumferentiis aequalibus ferantur, celeritate inaequali, sed utraque motu equabili, qualem in his omnibus intelligi volumus; erit vis centrifuga velocioris, ad vim tardioris, in ratione duplicata celeritatum.

I V.

Si mobilia duo aequalia, in circumferentiis inaequalibus circumlata, vim centrifugam aequalem habuerint; erit tempus circuitus in majori circumferentia, ad tempus circuitus in minori, in subdupla ratione diametrorum.

V.

Si mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, qua sit quarta parti diametri aequalis; habebit vim centrifugam suae gravitati aequalem; hoc est, eadem vi funem quo in centro detinetur intendet, atque cum ex eo suspensum est.

V I.

In cava superficie conoidis parabolici, quod axem ad perpendicularum erectum habeat, circuitus omnes mobilis, circumferentias horisonti parallelas percurrentis, sive parvae sive magna fuerint, aequalibus temporibus peraguntur: quae tempora singula aquantur binis oscillationibus penduli, cujus longitudo sit dimidium lateris recti parabola genitricis.

V I I.

Si mobilia duo, ex filis inaequalibus suspensa, gyrentur ita ut circumferentias horisonti parallelas percurrant, capite altero fili immoto manente; fuerint autem conorum, quorum superficiem fila hoc motu describunt, altitudines aequales; tempora quoque circulationum aequalia erunt.

V I I I.

V I I I .

DE VI CAN-
TRIFUGA.

Si mobilia duo, uti prius, motu conico gyrentur, filis aequalibus vel inaequalibus suspensa; fuerintque conorum altitudines inaequales; erunt tempora circulationum in subduplicata ratione ipsarum altitudinum.

I X .

Si pendulum, motu conico latum, circuitus minimos faciat; eorum singulorum tempora, ad tempus casus perpendicularis ex dupla penduli altitudine, eam rationem habent, quam circumferentia circuli ad diametrum: ac proinde aequalia sunt tempori duarum oscillationum lateralium, ejusdem penduli, minimarum.

X .

Si mobile in circumferentia feratur, circuitusque singulos absolvat eo tempore, quo pendulum, longitudinem semidiametri circumferentia ejus habens, motu conico circuitum minimum absolveret, vel duplicem oscillationem minimam lateralem: habebit vim centrifugam sua gravitati aequalem.

X I .

Penduli cujuslibet, motu conico lati, tempora circuitus aequalia erunt tempori casus perpendicularis, ex altitudine penduli filo aequali; cum angulus inclinationis fili, ad planum horizontis, fuerit partium 2. scrup. 54, proxime. Exacte vero, si anguli dicti sinus fuerit ad radium, ut quadratum circulo inscriptum ad quadratum à circumferentia ejus.

X I I .

Si pendula duo, pondere aequalia, sed inaequali filorum longitudine, motu conico gyrentur, fuerintque conorum altitudines aequales; erunt vires, quibus fila sua intendent, in eadem ratione quæ est filorum longitudinis.

X I I I .

Si pendulum simplex oscillatione laterali maxima agitetur, hoc est, si per totum circuli quadrantem descendat: ubi ad punctum imum circumferentia pervenerit, triplo majori vi filum suum trahet, quam si ex illo simpliciter suspensum foret.

F I N I S .

CORRIGENDA.

- Pag. 5. versu 9. à fine, pro N lege R; qua litera in figura omissa est.*
Pag. 6. v. 4. à fine, pro X scribe A.
Ibidem v. ult. pro B scribe A. Et sic quoque pag. sequ. versu 2.
Pag. 7. v. 2. à fine, pro M K scribe K.
Pag. 16. v. 13. post, tricesimamve, adde aut etiam minorem.
Pag. ead. v. 23. & 24. citantur litera A, B, C, qua in figura omissa sunt. ubi lineâ hac eadem 24. post, à puncto autem C, adde centro oscillationis.
Pag. 16. v. 3. lege quadrato.
Pag. 56. v. 7. à fine pro O A lege S A.
Pag. 81. & 84. in figurarum altera qua est ad sinistram, non ex T ducenda erat T X, sed ex V rectâ V X parallela L K.
Pag. 85. v. 11. à fine, post K M, L N, adde, quarum hæc major erit.
Pag. 86. v. 1. pro a x lege a x x, & dele D y.
Pag. 87. v. 10. à fine, pro F D scribe B D.
Ibidem v. 2. à fine, pro F H K scribe A R I.
Item v. 3. à fine, lege continuatæ.
Pag. 95. v. 1. pro B scribe G.
Pag. ead. v. à fine 5. lege volumus.
Pag. 99. v. 12. dele velut Q Q.
Pag. 104. v. 10. pro A D lege M D.
Pag. 107. in fig. qua ad dextram, debebat punctum H esse ad alteram partem puncti C.
Pag. 111. v. à fine 4. 6. & 7. pro 2 x m lege 2 x m.
Pag. 112. v. 2. pro $\frac{m m l l}{\theta}$, lege $\frac{m m - l l}{\theta}$.
Pag. 123. v. 20. pro & H centrum gravitatis, lege, & O H subcentrica.

UNIVERSITY OF MICHIGAN



3 9015 02629 1511

**DO NOT REMOVE
OR
MUTILATE CARD**

